

平成 30 年 6 月 20 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15H03701

研究課題名(和文)複素空間における「古典力学の基礎問題」と非可積分トンネル効果

研究課題名(英文)The fundamental problem of classical dynamics'' in the complexified space and non-integrable tunneling phenomena

研究代表者

池田 研介 (IKEDA, Kensuke)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：40151287

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,100,000円

研究成果の概要(和文)：近可積分領域の非可積分系のトンネル効果が提唱した「くりこみ摂動論」によって研究され、くりこみ不能な相互作用によって可積分系のinstantonトンネル過程が非可積分トンネル過程に転移する様相と後者の特性が解明された。我々の方法論的根幹にある複素半古典理論の難点とされたStokes現象を支配するStokes幾何学が厳密WKB法にもとづき、量子写像の反可積分極限に対し解明され、実効軌道数表式を導いた。量子カオスに於ける混合性転移の臨界現象が明らかにされた。未解明の有界系での転移を解明する新方法が提案され、理想混合状態での古典相関追従寿命が従来の評価より遙かに長い事を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：First, the transition process from the instanton tunneling, the typical tunneling process in integrable system, to the non-instanton (NI) tunneling process is elucidated by developing a renormalized perturbation method. The remarkable characteristics of the NI tunneling process is clearly explained as an unrenormalizable action of the resonant interaction. Next, the Stokes geometry, which provide rich information for solving an essential difficulty inherent in our complexified semiclassical method, is clarified for a quantum map system in the ideally chaotic regime (the so-called horseshoe limit). Finally, a new method for investigating quantum chaotic mixing from the auto-correlation characteristics is proposed, and the lifetime in which classical chaotic mixing is maintained in the quantum counterpart is shown to be much longer than the one which has been conjectured so far.

研究分野：物理学

キーワード：tunneling effect semiclassical theory nonintegrable system quantum chaos dynamical theory

1. 研究開始当初の背景

多自由度ハミルトン系の古典運動方程式は一般に解くことができない。この事実を顕わに認識させたのはポアンカレである。ポアンカレは、解くことのできる系に摂動が入り、非可積分になった系に現れる動力学的諸問題を「力学の基本問題」と呼びその解決を呼びかけた。しかし「力学の基本問題」は100年以上経っても今なお未解決の基本問題である。非可積分系、とくに完全可積分系にわずかな摂動のはいった近可積分系では多様な軌道が複雑に混在し完全な解明にはほど遠い。一方、力学空間を複素空間に拡張すると規則軌道は、複素領域において、特異点の集積する、いわゆる「自然境界」で破断し、それは非可積分性に由来する複雑な運動を予見させる。一方複素空間の軌道は量子力学に於いてインスタントン理論でも知られるようにトンネル効果として現れる。従って非可積分性は実空間の古典力学よりむしろ複素空間を通して量子力学トンネル効果の異常として検知される可能性が高い。これは我々が20年あまり提唱してきた全く新しい視点である。

実際、我々は自身が開発した複素半古典論の方法を駆使して、ここ20年あまり、非可積分な複素力学系が複素半古典論トンネル効果の記述に極めて有効であることを世界に先駆けて見出し、様々な状況においてその妥当性を実証してきた。一方、この20年あまりの間に非可積分系においてはトンネル確率が異常増大することが理論的実験的に確かめられつつあり、カオスや非線形共鳴に助けられたトンネル効果、即ち「chaos assisted tunneling ; CAT」や「resonance assisted tunneling ; RAT」というコトバも定着しつつあった。

しかしこれらの概念を支える理論は量子論と半古典論を折衷したきわめて現象論的理論に留まっていた。本研究の目的は、非可積分ハミルトン系における量子効果、とくに量子トンネル効果を複素領域の力学(複素力学系)および複素半古典理論を中心に据え、古典理論に現れる非可積分性概念でトンネル現象を統一的に解析する。

自然境界の概念は複素拡張した純古典系に対して有効であるのみならず、純量子概念であるカオス波動関数の研究に新機軸を開く可能性がある。世界的にカオス的な量子系における波動関数の性質が拡散過程の回復転移=アンダーソン転移と関係させて研究されてきた。特別な例に対してではあるが、局在波動関数が解析的に自然境界を持つことが我々によって初めて確認され、非局在転移と自然境界の関係性が非常に興味深い。この研究の基礎となる混合性転移=局在非局在転移の研究も本研究課題の一つである。

2. 研究の目的

以下、本課題のオリジナルな目標を再確認する。

(1) まず非可積分性が十分大きい場合、時間領域半古典論をフルに使うトンネル緩和の定常領域におよぶ長時間でのカオス的トンネル過程の複素半古典論理論を完成する。

(2) 一方、近可積分系の大きな問題は上記ポアンカレのいう基本問題に関連して、可積分トンネルがいかに非可積分トンネルに変貌するかという問題である。これに関してはまず純量子論的研究を系統的に積み上げる事が必要であり、純量子論的に可積分非可積分転移の様相を精査する。この課題は、非可積分によって誘起されると思われるトンネル確率の増大過程の解明につながる。最終的には我々の方法の根幹である複素半古典理論を適用して近可積分系のトンネル異常を解明する。

(3) 上記、我々が発展させてきた複素半古典論を実行する最大の武器が、剪定法とよばれる複素古典軌道から有意な軌道を切り出す一連の手続きである。この方法は極めて強力で、複素半古典論を成功に導いてきたが、それが成り立つ根拠が未だに未解明である。剪定法の根拠を最近進展著しい exactWKB 法の観点で数学的解明にあたる。

(4) 量子固有状態が量子化される古典不変多様体上に非可積分性の効果として必ず顕れる特異点の集積=自然境界の量子力学トンネル確率に及ぼす効果を系統的に解明する。まず純量子論的方法で攻め波動関数のトンネル成分が自然境界によってどのように影響をうけるか解明する。

(5) 量子カオス系、即ち古典極限に於いてカオス的な系の混合性-時間非可逆性転移の解明。

特に上に述べた自然境界概念によって混合性が自己組織される過程を解明する事を目指す。その基本作業として従来の世界的研究の潮流に沿って、無限量子カオス系の混合転移である局在非局在転移を精査し、研究から取り残されてきた、自然に見られる有界な量子カオス系に対して、混合転移を純量子論的に解明する手法を確立する。

3. 研究の方法

(1) は我々が発展させてきた複素半古典論理論に全面的に依拠する。最も簡単にトンネル現象の伝統的モデルを量子写像化した Henon 写像を使う。実際計算では複素空間を縦横に走る複素カオス軌道の高精度数値計算する手法が中心である。

その中から物理的に無意味な軌道を「転回点」において Stokes 線を使う剪定原理にしたがって裁断する。この方法は、半経験的に非常

に強力であることは、益々認識されつつあるがその数学的基礎が解明されていない。この課題が(3)であり、最も簡単なカオス極限の Henon 写像をモデルに使い、数学的基礎が明確な exact WKB 解析の立場から Stokes 幾何学の観点から剪定法を評価する作業を進展させた。

しかし課題(2)では、上の作業に並行して、我々が、開発してきた Baker-Hausdorff-Campbell 展開を基礎にした純量子論取り扱いを行った。この方法は量子カオス系の最も簡単な代表例として広く使われてきた量子写像系をモデルとして、近可積分領域の量子写像を 1 次元量子系として可積分化する繰り込み操作を実行し、残差相互作用の繰り込みによる変化を追跡しつつ、残差による摂動計算を実行する。<繰り込み摂動論> が成功すれば非可積分性は残差に封じ込められ、その効果を一目瞭然で観察できる。この方法は課題(1)の方法論であり、これに基づく解析的-数値的解析と正確な量子数値計算を対比させつつ研究が進展した。まず純量子論的方法で攻め、次に研究がなかなか大変な複素半古典論の枠組みにのせる戦略である。この手法は(4)にも適用される。

(5)に関してはこれまでの経過を踏まえて、まず研究が蓄積されてきた非有界量子カオス系の混合転移である拡散非拡散転移の研究を波束伝搬法(wavepacket propagation)で実施して、まず非有界系の転移現象を系の有効自由度を変化させつつ調べた。付加自由度を線形振動子によって模擬する事によって、その数で有効自由度を制御し実効的に 1 次元無限系の計算で系統的に転移の様相の変化を調べた。無限系から有限系の研究に進行するにあたって、有限系の混合特性を特徴づける時間相関特性を付加無限系である観測系に拡散過程として転写する方法を開発した。これによって無限系で開発された諸手法が有限系でも使えるようになった。

4. 研究成果

(1) 長時間スケールでおきる非可積分トンネル効果を時間領域複素半古典理論で追跡するための膨大な基礎作業が行われており、ようやくトンネルに寄与する複素古典軌道の計算が軌道にのりはじめたところである。対象は量子写像系の典型とされる Henon 写像である。ようやくトンネル緩和による定常領域にまで計算が可能になり、時間的に初期集合(Laputa 集合)のフラクタル構造が発展する様子が追跡できるようになったが、この課題の成果に対する公式の発表は行っていない。次に複素半古典論の基礎問題に関係して(3)に関する成果を先にとりあげる。

(3) 複素半古典論の鍵を握る剪定法では転回点まわりに Stokes 線を引き劣軌道を除く。

この時処理は軌道集合が作る枝をたどりつつ除去を局所的に行う。その妥当性を検討すべく上記 Henon 写像の最も非可積分な極限(馬蹄形極限)に限定して、exact-WKB 解析の立場から、Stokes 幾何学構造を解明する事ができた。境界条件に支配される Stokes 幾何の global な位相構造のために軌道の寄与状況に cancellation が起き寄与候補軌道数の指数増大率が額面上の位相 entropy を下回る明確な結果が得られた。従来局所的に処理してきた Stokes 現象の処理を大域的に見直した初めての結果である。

今後の研究を馬蹄形極限から解放する方向として Stokes 幾何の分岐と力学構造の分岐を同調させるアプローチが有効と考えられる。

(2) 非可積分量子系の典型モデルとされる量子写像系に対してその可積分部分を系統的に可積分系として繰り込み、残差成分を摂動として扱う上記<繰り込み摂動理論>が発展させられた。この方法を減衰型および共鳴型の典型的トンネル現象を示す量子写像系のクラスに適用する事によって可積分トンネル効果の典型である instanton(I)トンネル過程が非 instanton(NI)トンネル過程に転移する様相と NI トンネル特性が純量子論的にほぼ解明された。繰り込まれなかった残差相互作用は量子写像の周期との共鳴を表す、くりこみ不変相互作用として残され、それが Non-instanton (NI)トンネルチャネルを誘起する。NI トンネル確率はトンネル効果にも拘らず、極めて「非量子的」でプランク定数に殆ど依存しない。I-NI 転移以後のトンネル特性は写像系の周期の量子との多量子共鳴励起過程間の逐次遷移と解釈できる。上記非量子的な NI トンネル確率は、近可積分系の古典カオスを特徴づける計量である Melnikov 積分と極めて類似した特異性

$$\text{トンネル確率} \quad \exp\{-\text{定数}/\hbar\} \quad (0 < < 1)$$

を示す「擬古典量」である事がわかった。以上は写像系に普遍的である。以上の結果は従来、欧米の RAT(resonance assisted tunneling)派が唱えていた、非線形古典共鳴解釈とは非常に異なるものであり、この繰り込み手法によって初めて、自由度間の量子共鳴に導かれる非可積分性の本質が捉えられた。目下その解釈をめぐる RAT 派との論争の渦中にある。本研究の最新成果は Physical Review E 誌に“Renormalized Perturbation Approach to Instanton-noninstanton Transition in Nearly-integrable Tunneling Process”として投稿中である。本課題の成果は、ポアンカレの「力学の基本問題」の問いかけに対する、我々の主張「古典非可積分性はまず量子トンネル効果として顕在化する」を、純量子現象論的にはあるが初めて裏付けた成果である。

(4) 古典自然境界の問題に関して、減衰型トンネルの代表例である Henon 写像の方法を共鳴型トンネルを表現する standard map に拡張中であるが目立った成果は出せていない。

(5) 量子カオス系への自然境界概念の拡張という企ての前作業として、量子カオス系の混合性転移を精査し、かなり成果があった。まず非有界系に対する拡散-非拡散転移の研究が系統的に行われ、3 自由度以上では臨界現象が存在し、その自由度依存性は、Anderson 転移問題でよく知られた自己無撞着理論を修正する事でかなり再現できた。ところがもっとも重要な転移臨界値の相互作用依存性はその予測から外れ、自由度数の増加によって著しく協同的に低下する。2 自由度系では相互作用の増大によって局在の指数関数的増大が起こる事も明確に示され、そこでは修正 SCF 理論が有効である事も明らかになった。半古典極限の様相は非常に興味深いが緒についたところである。

一方、懸案の有界量子カオス系の混合性-非可逆性転移問題に関して、自己相関関数の Fourier 特性を計測する方法が開発され、まず 2 自由度有界量子カオス系の混合特性研究に使われた。Fourier 特性が古典特性に追従できる時間スケールが、従来考えられてきた Heisenberg time より遙かに長く、その自乗に比例する事が初めて明らかにされた。ここで使われた方法によって、有界量子カオス系での混合性への転移が研究できるようになった。

以上の結果から、調和振動子 + 2 自由度有界量子カオス系というわずかに 3 自由度を使った量子系でダンパーが設計できる可能性が最近指摘され、Physical Review E 誌に "A quantum damper" という論文が投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

(1)Hiroaki S.Yamada, Fumihiro Matsui, and Kensuke S. Ikeda,

Scaling properties of dynamical localization in monochromatically perturbed quantum maps:Standard map and Anderson map

Phys. Rev. E,97,2018,012210 1-13 査読有
DOI 10.1103/PhysRevE.97.012210

(2)Akira Akaishi, Kazuki Aoki and Akira Shudo,

Hierarchical structure in sharply-divided phase space for the piecewise linear map, Phys. Rev. E. ,95 2017 052207 1-8 査読有

DOI 10.1103/PhysRevE.95.052207

(3)Hiromitsu Harada, Amaury Mouchet and Akira Shudo,

Riemann surfaces of complex classical trajectories and tunnelling splitting in one-dimensional systems,

J. Phys. A: Math. Theor,50,2017,435204 1-27 査読有

DOI 10.1088/1751-8121/aa8c67

(4)F.Matsui, H.S.Yamada and K.S.Ikeda,
Relation between irreversibility and entanglement in classically chaotic quantum kicked rotors,

Europhys. Lett.,114,2016,60010 1-5 査読有
DOI 10.1209/0295-5075/114/60010

(5)Akira Shudo and Kensuke S. Ikeda,
Toward pruning theory for the Stokes geometry of the quantum Henon map, Nonlinearity,29,2016,375-425 査読有

DOI

<http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/29/2/375>

(6)Fumihiro Matsui, Hiroaki S.Yamada and Kensuke S. Ikeda,

Measuring lifetime of correspondence with classical decay of correlation in quantum chaos,

Europhys. Lett.,113,2016, 4008 1-6 査読有
DOI 10.1209/0295-5075/113/40008

(7)Yasutaka Hanada, Akira Shudo and Kensuke S. Ikeda,

Origin of the enhancement of tunneling probability in the nearly integrable system,

Phys. Rev. E,91,2015,042913 1-16 査読有
DOI 10.1103/PhysRevE.91.042913

(8)Hiroaki S.Yamada, Fumihiro Matsui, and Kensuke S. Ikeda,

Critical Phenomena of Dynamical Delocalization in Quantum Anderson Map, Phys. Rev. E,92,2015,062908 1-5 査読有

DOI 10.1103/PhysRevE.92.062908

(9)Akira Shudo and Ruriko Ohashi,
Numerical verification of the exact WKB formula for the generalized Landau-Zener-Stueckelberg problem,

Advances in Science, Technology and Environmentology, Special issue :ASTE (Waseda University),B11,2015,75-80 査読有 DOI なし

(10)Yasutaka Hanada, Akira Shudo and Kensuke S. Ikeda,

Resonance-assisted tunneling in integrable and nonintegrable systems, Advances in Science, Technology and Environmentology, Special issue :ASTE (Waseda University),B11 2015 127-130 査読有 DOI なし

(11) Hiromitsu Harada and Akira Shudo,

Non-linear resonances and singularity structures of complex classical dynamics,

Advances in Science, Technology and Environmentology, Special issue :ASTE (Waseda University),B11,2015,131-134 査読有 DOI なし

〔学会発表〕(計 40 件)

- (1)2018 年 日本物理学会(第 73 回年次大会)
吉野 元,首藤 啓
馬蹄条件下での半古典近似の長時間有効性について
- (2)2018 年 日本物理学会(第 73 回年次大会)
島田 尚明,首藤 啓
完全 WKB 解析とストークス幾何に基づく三準位非断熱遷移問題の研究
- (3)2018 年 日本物理学会(第 73 回年次大会)
吉田 賢典,渡邊 真悟,首藤 啓
非カオス的な面積保存写像における劣拡散を記述する確率モデルについて
- (4)2017 年 日本物理学会 2017 年秋季大会
池田 研介, 花田 康高, 首藤 啓
対応原理によるインスタントン 非インスタントン転移の研究 IV
- (5)2017 年 日本物理学会 2017 年秋季大会
池田 研介, 山田 弘明
単色摂動アンダーソン写像および標準写像の 2 次元局在現象
- (6)2017 年 日本物理学会 2017 年秋季大会
花田 康高, 首藤 啓, 池田 研介
量子写像の Baker-Campbell-Hausdorff 展開について
- (7)2017 年 日本物理学会 2017 年秋季大会
吉野 元,首藤 啓
馬蹄条件を満たすカオス系における半古典近似破綻領域の漸近挙動
- (8)2017 年 日本物理学会 2017 年秋季大会
吉田 賢典,渡邊 真悟,首藤 啓
劣拡散を示す面積保存写像における周期軌道近傍の淀み運動と連続時間ランダムウォーク
- (9)2017, “ Chaos, and what it can reveal ”
A conference on the occasion of Petr Seba's 60th birthday,
Akira Shudo,
Amphibious Complex Orbits and Dynamical Tunneling
- (10)2017, Current Trends in Dynamical Systems and the Mathematical Legacy of Rufus Bowen,
Kensuke Yoshida, Shingo Watanabe, Akira Shudo,
Sub-diffusion in a non-chaotic area-preserving map, continuous-time random walks and ergodic problems
- (11)2017 年 日本物理学会 (第 72 回年次大会)
花田 康高,首藤 啓,池田 研介
可積分写像におけるトンネル異常
- (12)2017 年 日本物理学会 (第 72 回年次大会)
池田 研介, 奥島 輝昭, 花田 康高, 首藤 啓

- 対応原理によるインスタントン 非インスタントン転移の研究 III
- (13)2017 年 日本物理学会 (第 72 回年次大会)
吉田 賢典,渡邊 真悟,首藤 啓
劣拡散を示す非カオス的な区分線型面積保存写像における待ち時間分布と連続時間ランダムウォーク
- (14)2017 年日本物理学会 (第 72 回年次大会)
吉野 元,首藤 啓
カオス系における時間領域半古典近似の破綻するタイムスケールについて
- (15)2017,The 6th Hamiltonian dynamical systems and related topics,
Akira Shudo,
Infinitely many stability islands and sticky dynamics in a piecewise linear map
- (16)2017,Workshop on Chaos and Diffusion in Leaky Systems,
Yasutaka Hanada,
Quantum tunneling in the classically chaotic systems
- (17)2016 年 日本物理学会 2016 年秋季大会
松井 文宏, 山田 弘明, 池田 研介
量子カオス系における固有状態の重ね合わせと不可逆性の寿命
- (18)2016 年 日本物理学会 2016 年秋季大会
池田 研介, 奥島 輝昭, 花田 康高, 首藤 啓
対応原理によるインスタントン 非インスタントン転移の研究 I
- (19)2016 年 日本物理学会 2016 年秋季大会
池田 研介, 奥島 輝昭, 花田 康高, 首藤 啓
対応原理によるインスタントン 非インスタントン転移の研究 II
- (20)2016 年 日本物理学会 2016 年秋季大会
花田 康高,首藤 啓,池田 研介
非可積分系のトンネル効果と古典共鳴の役割について
- (21)2016 年 日本物理学会 2016 年秋季大会
吉田 賢典,渡邊 真悟,首藤 啓
区分線型面積保存写像における劣拡散と連続時間ランダムウォーク
- (22)2016 年 数理解析研究所研究会 『力学系とその関連分野の連携探索』
Akira Shudo,
Toward pruning theory for the Stokes geometry of the quantum Henon map
- (23)2016,RIMS workshop “ Exponential Asymptotics of Difference and Differential Equations ” ,
Akira Shudo
Anomalous behavior of transition matrix elements in nonintegrable quantum maps
- (24)2016,PHHQP16: Progress in Quantum Physics with Non-Hermitian Operator,
Akira Shudo
Amphibious Complex Orbits and Dynamical Tunneling,
- (25)2016,PHHQP16: Progress in Quantum Physics with Non-Hermitian Operator,

Yasutaka Hanada, Akira Shudo and Kensuke S. Ikeda,

Tunneling in nearly integrable systems with a non-hermitian perturbation

(26)2016, Quantum Chaos, Graphs and Nodal Domains (Weizmann Institute, Rehovot, Israel),

Akira Shudo,

Toward pruning theory for the Stokes geometry of the quantum Henon map

(27)2016年 日本物理学会 第71回年次大会
奥島 輝昭, 池田 研介

多自由度ハミルトン系における周期軌道の軌道不安定性に基づく緩和現象の研究 VII

(28)2016年日本物理学会 第71回年次大会
原田 浩充, 首藤 啓

標準型ハミルトン系のトンネル分裂と複素古典軌道のトポロジー

(29)2016年日本物理学会 第71回年次大会
花田 康高, 首藤 啓, 池田 研介

非可積分系におけるトンネル分裂の階段構造について II

(30)2016年 日本物理学会 第71回年次大会
吉田 賢典, 渡邊 真悟, 首藤 啓

古典系における動的局在と区分線型面積保存写像における軌道の異常拡散について

(31)2016年 日本物理学会 第71回年次大会
原田 浩充, 首藤 啓

標準型ハミルトン系のトンネル分裂と複素古典軌道のトポロジー

(32)2015年 数理解析研究所研究会 『計算機を援用した完全WKB解析の研究--仮想的変わり点の周辺を中心として ---』

首藤 啓

Quantum tunneling in nonintegrable systems: beyond the leading order semiclassical description

(33)2015年 数学協働プログラム、平成27年度ワークショップ 『大自由度分子系における化学反応機序の理解と制御』

首藤 啓

非可積分系のトンネル効果

(34)2015, Dynamics Days Central Asia (Khiva, Uzbekistan),

A. Shudo,

Nonadiabatic transition in multilevels and the exact WKB method

(35)2015, International Workshop on Ray & Wave Mechanics in 2D Microcavity and Related Systems,

A. Shudo,

The existence of infinitely many stability islands and sticky dynamics in a piecewise linear map

(36)2015, The 14th Christmas symposium of Physicists (Maribor, Slovenia),

A. Shudo,

The existence of infinitely many stability islands and sticky dynamics in a piecewise linear map

(37)2015年 日本物理学会 2015年秋季大会
松井 文宏, 池田 研介, 山田 弘明

もつれ合いの異常ゆらぎと時間の矢

(38)2015年 日本物理学会 2015年秋季大会
池田 研介, 花田 康高, 首藤 啓

インスタントン-非インスタントン転移の実半古典論

(39)2015年 日本物理学会 2015年秋季大会
吉田 賢典, 首藤 啓

強いカオス系における古典軌道間の相関と波動関数の干渉

(40)2015年 日本物理学会 2015年秋季大会
原田 浩充, 首藤 啓

標準型ハミルトン系の古典力学とトンネル分裂

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田 研介 (IKEDA Kensuke)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：40151287

(2) 研究分担者

首藤 啓 (SHUDO Akira)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：60206258

高橋 公也 (TAKAHASHI Kinya)

九州工業大学・大学院情報工学研究院・教授

研究者番号：70188001

(3) 研究協力者

山田 弘明 (YAMADA Hiroaki)

山田物理学研究所