

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 24 日現在

機関番号：13801

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：15H06251

研究課題名(和文) Veech群の幾何的性質に関する研究

研究課題名(英文) Geometric properties of Veech groups

研究代表者

四之宮 佳彦 (Shinomiya, Yoshihiko)

静岡大学・教育学部・講師

研究者番号：40755930

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：平成27年度は算術的Veech曲面に対してVeech群の型とモジュラス比を比較する評価式の構成を目指した。算術的Veech曲面のVeech群の型を、トーラスの分岐被覆としての被覆度で評価した。しかしその評価式はまだ荒いものであり改良が必要である。

平成28年度は新たにタイヒミュラー円板上の木の性質についても研究した。木の各点はVeech曲面の対応する。良い性質を持ったVeech曲面に対応する点が木の各辺の上に存在し、その点の位置が幾何学的にも意味があることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In the first year, I aim to give an inequality to compare the signatures of Veech groups with ratios of moduli for arithmetic Veech surfaces. I gave an comparison between the signatures of Veech groups and degrees of signatures of Veech surfaces as branched coverings of tori. However, this comparison needs to be improved.

In the last year, I study properties of trees on Teichmüller disks. It is known that every point of the trees are corresponding to Veech surfaces. I found that each edge of such tree have a point corresponding to a Veech surface with certain good property. I also gave a geometrical meaning of such points.

研究分野：函数論

キーワード：Veech群 Veech曲面 タイヒミュラー空間 タイヒミュラー曲線 リーマン面

1. 研究開始当初の背景

曲面に入るリーマン面の構造の成す空間はリーマン面のモジュライ空間と呼ばれる。モジュライ空間の解析的及び幾何学的性質の研究は函数論及び低次元トポロジー、代数幾何学等において非常に重要である。モジュライ空間内の測地線はリーマン面の効率の良い変形を表しており、この変形はリーマン面上のユークリッド構造の変形と考えることができる。そのため、ユークリッド構造を持った曲面を研究することによってモジュライ空間の様々な解析的及び幾何学的性質を明らかにすることができる。そのようなユークリッド構造を持った曲面の中でも最も重要でかつ良い性質を持つものが Veech 曲面である。Veech 曲面はモジュライ空間の研究だけでなく多くの分野の研究で用いられる。Veech 曲面は多角形の切り貼りで簡単に構成でき、ユークリッド幾何学の概念が利用できるため、要求した性質をもった具体例を構成しやすい。そのため、タイヒミュラー理論やクライン群論、低次元トポロジーの様々な研究において、具体例を構成して現象を解析する際や、反例を与える際には Veech 曲面がよく考えられる。また、Veech 曲面のユークリッド構造の変形はモジュライ空間内に有限型リーマン面を形成する。この様な有限型リーマン面はタイヒミュラー曲線と呼ばれており、現在盛んに研究が行われている。しかしながら、これまでのタイヒミュラー曲線の研究では、先ずタイヒミュラー曲線が与えられていることが前提とされているものがほとんどであった。タイヒミュラー曲線の形は Veech 曲面の自己同型群である Veech 群によって決定される。そのため、Veech 曲面の Veech 群の情報を得ることは非常に重要なことであるが、一般に Veech 曲面が与えられたとき、対応する Veech 群がどの様なものになるのかは解明できていない。

2. 研究の目的

Veech 曲面が与えられたとき、その Veech 群を完全に決定することは非常に困難な問題である。Veech 群は上半平面に作用するフックス群であることが知られている。ゆえに上半平面のこの Veech 群による商空間は複素 1 次元のオービフォールドである。このオービフォールドの種数、カスプの数、cone point の位数の情報を Veech 群の型という。この型が対応するタイヒミュラー曲線の形を決定する量の一つである。

本研究では、Veech 群の型を元の Veech 曲面の幾何学的情報で評価することを目指した。Veech 曲面上の Jenkins-Strebel 方向とは、その方向の測地線が閉であるか特異点同士を結ぶ線分であるときにいう。Veech 曲面上の Jenkins-Strebel 方向は方向の集合で稠密である。Veech 曲面上の Jenkins-Strebel 方向を与えると、Veech 曲面のほとんど至る点はその方向の閉測地線上にあり、それらの

測地線により Veech 曲面はいくつかの円柱に分解される。これらの円柱を Veech 曲面の円柱分解という。モジュラス比とは、Veech 曲面を円柱分解した際に各円柱に定まるモジュラスという量の比のことである。モジュラス比は Veech 曲面の Jenkin-Strebel 方向を与えれば簡単に計算できる幾何学的量である。このモジュラス比と Veech 群の型とを比較する評価式を与えれば、具体的に求めることができない Veech 群の情報を、簡単に計算することができるモジュラス比で制御できる。これまでの研究によって、Veech 群の型をモジュラス比で下からの評価することには成功していた。本研究では、Veech 群の型をモジュラス比によって上から評価する評価式を構成することを目指とした。

3. 研究の方法

算術的 Veech 曲面と非算術的 Veech 曲面それぞれの場合について研究を行った。算術的 Veech 曲面の場合には、それがトラスの分岐被覆となることを利用して評価式の構成を試みた。非算術的 Veech 曲面の場合には対応するタイヒミュラー円板上の木の性質を調査した。木の辺の個数と Veech 群の型との関係を表す不等式が知られているので、本研究ではこの木の辺の持つ性質の解明を試みた。また、モジュラス比に加えて、Veech 曲面の NSVT (not small virtual triangle) による分類も用いた。

期間中には以下の研究集会、セミナーに参加し、タイヒミュラー空間やモジュライ空間に関連する研究についての情報収集を行った。また、一部では自らの研究についての講演も行った。(主な発表論文等の〔学会発表〕参照)

以下が参加した研究集会およびセミナーである。

- ・ 低次元多様体モジュライ空間の幾何学, 京都大学(京都府京都市), 2015年12月.
- ・ 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 東京工業大学(東京都目黒区), 2016年2月.
- ・ 東工大複素解析セミナー, 東京工業大学(東京都目黒区), 2016年7月.
- ・ Geometry, Topology and Dynamics of Moduli Spaces, National University of Singapore (シンガポール), 2016年8月.
- ・ 第59回函数論シンポジウム, 静岡県男女共同参画センター あざれあ

(静岡県静岡市),
2016年10月.

- ・ 低次元多様体モジュライ空間の幾何学,
京都大学(京都府京都市),
2016年12月.
- ・ Conference "Asymptotic geometry of
groups and spaces",
Heidelberg University (ドイツ),
2017年2月.

更に, 以下のように他の研究者とともに本研究に関連する話題について議論した.

- ・ 2016年3月7日から8日に山木大輔(東京工業大学・教務補佐委員)を招聘し, 本研究に関連する話題についての議論を行った. 特に, リーマン面の周期行列, 組み合わせ的周期行列について議論した.
- ・ 2016年3月14日から18日に井口雄紀(東京工業高等専門学校・助教)を招聘し, タイヒミユラー空間の grafting ray とそのタイヒミユラー円板への漸近性について議論を行った.
- ・ 2017年3月15日から16日に井口雄紀(東京工業高等専門学校・助教), 天野政紀(静岡県立大学, 助教)と共に, 平坦構造の変化から定まるタイヒミユラー空間の新しい座標についての議論を行った. 更に, その座標において自然に定義される距離とタイヒミユラー距離の関係について議論した.

4. 研究成果

平成27年度は算術的 Veech 曲面に対して目的の評価式の構成を目指した. これまでの研究で算術的 Veech 曲面の Veech 群のフックス群としての型を, トーラスの分岐被覆としての被覆度で評価した. しかしその評価式は荒く, 複雑なのでさらに改良していく必要がある.

平成28年度は新たにタイヒミユラー円板上の木の性質についても研究した. グラフの辺の各点は Veech 曲面の対応する. 良い性質を持った Veech 曲面に対応する点がグラフの各辺の上に存在し, その点の位置が幾何学的にも意味があることを明らかにした. ただし, その性質を利用して Veech 曲面の Veech 群の型とモジュラス比との関係を表す不等式を構成するには至っていない. 目的の不等式を構成するには今回得られた性質についてより詳細に調査する必要がある.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

(査読あり)

四之宮 佳彦,

Veech surfaces and their periodic points,
Conformal Geometry and Dynamics,
20 (2016), 176-196, 2016,
DOI: <https://doi.org/10.1090/ecgd/296>.

[学会発表](計2件)

四之宮 佳彦,

Veech 曲面の幾何,
第59回函数論シンポジウム,
静岡県男女共同参画センター あざれあ
(静岡県静岡市),
2016年10月8日.

四之宮 佳彦,

Veech 曲面の幾何,
研究集会「2次微分の幾何とその周辺」,
東京大学(東京都目黒区),
2017年1月13日.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

四之宮 佳彦 (Shinomiya, Yoshihiko)
静岡大学・教育学部・講師
研究者番号: 40755930

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3)連携研究者

()

研究者番号：

(4)研究協力者

- ・ 井口 雄紀 (Iguchi, Yuki)
東京工業高等専門学校
一般教育科・助教
研究者番号：10756795
- ・ 天野 政紀 (Amano, Masanori)
静岡県立大学
経営情報学部経営情報学科・助教
研究者番号：60793867
- ・ 山木 大輔 (Yamaki, Daisuke)
東京工業大学
理工学研究科・教務補佐委員
研究者番号：なし