

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 29 日現在

機関番号：13901

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：15H06261

研究課題名(和文) p 進微分方程式の解の漸近挙動とその応用研究課題名(英文) An asymptotic behavior of solutions of p -adic differential equations

研究代表者

大久保 俊 (Ohkubo, Shun)

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：20755160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：単位開円板上のFrobenius構造付き p 進微分方程式に対する解の増大度に関する、Chiarellotto-Tsuzukiの予想に関する研究をおこなった。基本的なアイデアは申請者によるChiarellotto-Tsuzukiの弱い予想に対する、よいcyclic vectorを構成するアプローチ(2017, Adv. Math.)を精密化することである。T. Nakagawa(2013, Tohoku)の論文にもとづき、あたえられた p 進微分方程式のgeneric fiberのFrobenius構造に条件を設定し、この仮定のもとで階数3の場合には増大度が決定できることを証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied Chiarellotto-Tsuzuki's conjecture on the growth of solutions of p -adic differential equations with Frobenius structures over open unit ball. Our basic approach is based on the author's previous work (2017, Adv. Math.) using certain cyclic vectors with respect to Frobenius structures. In the article written by T. Nakagawa (2013, Tohoku), we found a certain condition on the determination of the growth. We considered a related condition to Nakagawa's condition, and for rank-3 differential equation satisfies this condition, we could verify Chiarellotto-Tsuzuki's conjecture.

研究分野：数論幾何

キーワード： p 進微分方程式 Gauss-Manin接続

1. 研究開始当初の背景

指数関数, 対数関数や楕円関数などの重要な複素関数は常微分方程式の解として定義されることがある. また複素多様体 SX 上の微分方程式は Riemann-Hilbert 対応を通じて SX の幾何学とも密接に結びついている. Sp 進微分方程式の理論ではこのような枠組みの Sp 進数体 \mathbb{Q}_p 上での類似を研究する. Sp 進微分方程式の研究は 1970 年頃, Dwork により端緒が開かれた. その後, Sp 進微分方程式と, (特異)コホモロジーの数論的類似である Sp 進コホモロジーの結びつきが認識されるようになり, Sp 進微分方程式は数論幾何を研究する際の重要な手段となっている. Sp 進微分方程式はある側面では \mathbb{C} 上の微分方程式の類似とも思える部分もあるが, \mathbb{Q}_p 特有の位相に起因する問題がある. 例えば, 確定特異点型線型常微分方程式に対する Fuchs の定理の naïve な Sp 進類似は成立せず, exponent (の Sp 進類似) に適切な条件を課さなくてはならない. 一方, 解の (収束円の) 境界での増大度については, 1970 年頃に Dwork が基礎的な研究をしていたが, それ以来, 長らく停滞していた. 2000 年代後半になり, Chiarellotto, Tsuzuki ([CT1], [CT2]) が Dwork の研究に注目し, 基本的な予想を提示するなどの進展があった.

2. 研究の目的

Gauss 超幾何級数などの特殊関数はしばしば常微分方程式の解として定義され, また複素多様体上の微分方程式とその解を知ることは元の多様体を研究する重要な手法である. これらの整数論的類似を追求すること, 特に Sp 進体上の微分方程式を研究することは現代数論の重要な手法の 1 つである. 本研究では Sp 進微分方程式の解の持つ性質を, その漸近的振る舞いに注目して研究を行う. Dwork は Sp 進微分方程式の解の発散具合は \log の負べき乗で上からおさえられることを発見し, 解空間に \log -growth filtration を定義した. “ \log -growth filtration の jump は有理的であろう” という Chiarellotto-Tsuzuki の弱予想は最近, 応募者により肯定的に解決された (参考文献 [O17]). 本研究の目的は, 応募者のこれまでの研究成果を発展させて, 弱予想の精密化である強予想とその数論幾何的帰結を探ることである.

3. 研究の方法

Chiarellotto-Tsuzuki の強予想 ([CT1]) の検証のため, 研究目的で述べた応募者の論文

[O17] の手法の再考察を行う計画である. まず強予想に関する既存の手法を述べる. Chiarellotto-Tsuzuki は Frobenius 構造付き Sp 進微分方程式の解 f が (多少の式変形を無視した上で)

$$\text{Frobenius 方程式: } b_n \sigma^n(f) + b_{n-1} \sigma^{n-1}(f) + \dots + b_0 f = 0, \quad b_i \in \mathbb{Z}_p[[x]]$$

をみたすことを示し, 強予想を一般の Frobenius 方程式の解 f の \log -growth の計算に帰着した.

ここで $\sigma: \mathbb{Q}_p[[x]] \rightarrow \mathbb{Q}_p[[x]]$; $\sum a_n x^n \mapsto \sum a_{nx^{pn}}$ は p -Frobenius 写像. 以下が Chiarellotto-Tsuzuki の重要な観察である:

1. 弱予想は次と同値: $\lambda_f := \inf\{\lambda; f \text{ は } \log\text{-growth } \lambda \text{ をもつ}\}$ は有理数.
2. 強予想は次と同値: λ_f は Frobenius 方程式の Newton polygon の最小 slope に一致する.

さらに彼らは階数 2 以下の場合にこの方程式を直接解き強予想を証明した. 彼らの手法は, T. Nakagawa により, ある仮定の下で, 部分的に一般化された (Tohoku, 2013). Nakagawa の仮定は非常に強く, 一般の場合に弱予想 (従って強予想) を証明するには至らなかった. そこで申請者は [O17] において, Frobenius 構造に関してある分類定理を証明することで, Chiarellotto-Tsuzuki による Frobenius 方程式の導出の過程を改良した. 結果として Frobenius 方程式 (ref {eq:1}) にさらに条件をつけてもよいことを証明した. この条件は Nakagawa の仮定よりも弱いが, 実はこの条件下でも Nakagawa の手法が適用できることも証明した. このようにして弱予想を解決した:

定理:
 λ_f は Frobenius 方程式の Newton polygon のある slope に一致する. Newton polygon の slope は定義により有理数なので, 上の 1 により弱予想は正しい.

Chiarellotto-Tsuzuki の観察 2 と合わせると応募者の主張は弱予想よりもだいぶ強く, 強予想にかなり迫っていることがわかる. 以上により, [O17] の手法を改良することで強予想にアプローチする.

4. 研究成果

(1) 単位開円板上の Frobenius 構造付き p 進微分方程式に対する解の増大度に関する, Chiarellotto-Tsuzuki の予想に関する研究

をおこなった。基本的なアイデアは申請者による Chiarellotto-Tsuzuki の弱い予想に対する、よい cyclic vector を構成するアプローチ (2017, Adv. Math.) を精密化することである。T. Nakagawa (2013, Tohoku) の論文に、増大度の決定に関する、cyclic vector の固有方程式がみたすべき十分条件が書いてあり、これをヒントにし、あたえられた p 進微分方程式の generic fiber の Frobenius 構造に条件を設定し、この仮定のもとで階数 3 の場合には増大度が決定できることを証明した。

問題はこの条件をどのような例がみたすか、どのくらい強いのか、ということであるが、この問題に答えを見いだすことはできなかった。当初はこの条件は一般の Frobenius 構造付き p 進微分方程式がみたしていることを期待していたが、generic fiber に条件を課したさいに、もとの p 進微分方程式がどのくらい存在するかを決定することは難しく、この点を克服することが今後の課題である。また、高い階数に対する一般化においても証明が機能するかチェックする時間的余裕とれなかった。これらの成果をまとめる時間がとれなかったことも心残りである。

(2) Calabi-Yau 多様体の Dwork 族から定義される p 進微分方程式について、pure of bounded quotient とよばれる、Chiarellotto-Tsuzuki により定義された条件をみたすことを確認した。また、 $K3$ 曲面の族の場合 (微分方程式の階数が 3 の場合) には、Frobenius Newton polygon が 2 通りしかとりえないことがわかり、このことと Nakagawa の結果から、この場合には Chiarellotto-Tsuzuki の予想が肯定的に成り立つことを確認した。

(3) p 進 Hodge 理論への応用については、Joe Kramer-Miller, The monodromy of F-isocrystals with log-decay, arXiv:1612.01164 という最近のプレプリントとの関係を著者との議論を通じて探ってみたが、具体的な成果はえられなかった。

引用文献

[CT1] B Chiarellotto, N Tsuzuki
Logarithmic growth and Frobenius filtrations for solutions of p -adic differential equations
Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 8 (03), 465-505

[CT2] B Chiarellotto, N Tsuzuki
Log-growth filtration and Frobenius slope filtration of F-isocrystals at the generic and special points
Documenta Mathematica 16, 33-69

[O17] On the rationality and continuity of logarithmic growth filtration of solutions of p -adic differential equations, arXiv:1502:03804, to appear in Advances in Mathematics 308 (2017), 83-120, DOI 10.1016/j.aim.2016.12.006.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 件)

〔学会発表〕 (計 4 件)

Shun Ohkubo, On the rationality of the logarithmic growth filtration of solutions of p -adic differential equations, Geometrie analytique et equations differentielles p -adiques, CIRM (France), March, 2017.

Shun Ohkubo, On the rationality of the logarithmic growth filtration of solutions of p -adic differential equations, Meeting on Study of Arithmetic Geometry, University of Tokyo (Tokyo), March, 2017.

Shun Ohkubo, On the rationality of the logarithmic growth filtration of solutions of p -adic differential equations, Seminaire de Geometrie Arithmetique, Universite Rennes 1 (France), January, 2017.

Shun Ohkubo, On the rationality of the logarithmic growth filtration of solutions of p -adic differential equations, Seminaire Theorie des Nombres, Universite Bordeaux (France), October, 2016.

〔図書〕 (計 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :

番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

<https://sites.google.com/site/shunohkubo/home/papers>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大久保 俊 (OHKUBO, Shun)
名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：20755160

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()