

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：15H06312

研究課題名(和文)非圧縮粘性流体に対する対称流・非減衰流の解析

研究課題名(英文)Analysis for symmetric and non-decaying viscous incompressible flows

研究代表者

阿部 健 (Abe, Ken)

京都大学・スーパーグローバルコース数学系ユニット・特定助教

研究者番号：80748327

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：大気や水などの非圧縮粘性流体の運動を記述するナビエ・ストークス方程式について、解の正則性や空間無限遠方の挙動について数学解析を行った。3次元ナビエ・ストークス方程式の軸対称解について、対称軸を除いた外部領域で適当に滑らかかつ減衰する初期値に対して滑り境界条件の元で時間大域軸対称旋回あり解を構成した。またディリクレ境界条件の元での外部問題について、有界関数空間での時間局所解の構成を行った。さらに空間次元が2次元の場合に有界かつディリクレ積分有限となる初期値に対して、時間大域一意解が存在することを証明した。

研究成果の概要(英文)：I have studied regularity and asymptotic behavior of solutions for the Navier-Stokes equations, which describes the motion of viscous incompressible flows such as the atmosphere and the water. In this research project, I have worked on the two problems. The first problem is an axisymmetric solution. I have constructed global unique axisymmetric solutions in an exterior domain subject to the slip boundary condition for decaying and sufficiently smooth initial data. The second is a non-decaying solution. I have constructed local-in-time unique solutions in an exterior domain in a space of bounded functions. For the two-dimensional case, I have proved that global unique solutions exist for bounded initial data with a finite Dirichlet integral.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ナビエ・ストークス方程式 有界関数空間 ストークス半群 解析半群 軸対称解 外部問題

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究課題は非圧縮粘性流体の運動方程式であるナビエ・ストークス方程式の解の正則性、空間無限遠方の挙動を解析する目的で計画した。研究代表者阿部（以下代表者）は課題開始当時、有界関数空間におけるストークス半群の解析性の研究を行っており（引用文献 ）、有界領域、外部領域などの領域に対してストークス半群の有界関数空間での評価の導出を行っていた。

本課題はこれらの有界関数空間の評価を基盤として、非線形ナビエ・ストークス方程式の解析を行う目的で計画した。有界関数空間は最大値ノルムを用いることから、爆発解の解析や空間無限遠方で非減衰となる解を扱う目的に適した空間である。非線形ナビエ・ストークス方程式についてはストークス半群の積分核による明示的な表示が可能な全空間、半空間の場合に儀我等（1999, 2001）やソロニコフ（2003）による解析の結果が知られていたが、有界領域など非自明な境界を持つ領域に対しては解析の結果が知られていなかった。

代表者は本研究課題開始前に先行研究（引用文献 ）において有界領域、外部領域などの領域に対して連続関数空間での時間局所解の存在定理を証明した。これにより、境界がある場合にもタイプ I 爆発が最小の爆発率になることを報告していた。また外部領域においては、少なくとも空間無限遠方で減衰する連続関数空間において時間局所一意解が存在することを証明していた。

2. 研究の目的

(1) 研究項目

本研究の目的はナビエ・ストークス方程式について 解の正則性と 空間無限遠方の挙動について有界関数空間を用いた解析を行うことである。

項目 については3次元流の正則性解明において重要な特殊解のクラスである、軸対称解の正則性の研究を目的とした。項目 については外部領域上空間無限遠方非減衰となる解の研究を目的とした。

(2) 先行研究

軸対称解の正則性

3次元全空間における軸対称解の正則性は、一般の初期値問題の解の正則性解明に向けて重要な問題である。これまで十分滑らかかつ空間無限遠方で十分速く減衰する軸対称旋回なし初期値に対しては、滑らかな時間大域一意解が構成できることがラジゼンスカヤ（1968）、ユーコスキー・ユートヴィッチ（1968）、レオナルディ等（1999）によって証明されている。しかし軸対称旋回あり初期値に対しては大きな初期値に対する時間大域一意解の存在は

不明である。（軸対称ベクトル場については図1参照）

軸対称旋回あり解については時間局所解がタイプ I 爆発しないことがチェン等（2008, 2009）とコッホ等（2009）により証明されており、軸対称クラスでの爆発解の非存在を示唆する結果を報告している。タイプ I 爆発解非存在の研究はその後一般の初期値に対しても研究されており、特異点付近で渦度場の方向が連続的に変わるならば、タイプ I 爆発が起こらないことが儀我・三浦（2011）により報告されている。爆発が起こる方程式に対してはタイプ I 爆発は実際に起り、また適当な初期条件の下でタイプ I 爆発しか起こらないことも知られている。しかしナビエ・ストークス方程式に対しては特異点付近でタイプ I 条件が満たされるかは不明である。

本研究課題実施期間中、レイ等（2016）は軸対称旋回あり解に対して対称軸付近での解の上からの各点評価を与えた。これによりタイプ I 爆発よりも十分速い爆発率を持つ爆発解が存在しないことが従う。

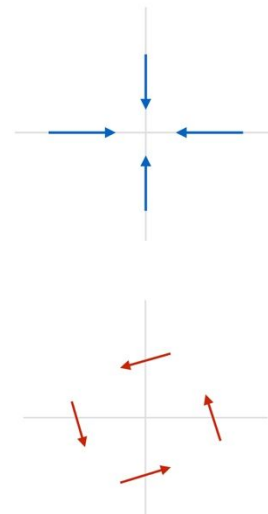


図 1: 軸対称ベクトル場の2次元成分の図。

旋回なしベクトル場（上）と旋回ありベクトル場（下）。（研究項目 ）

外部領域における非減衰流

外部領域において空間無限遠方で漸近的に定数になる解の研究は、ルレイ（1933）の研究に始まり、以後物理的に重要な2次元、3次元の場合において空間無限遠方の挙動や、安定性について多くの研究が行われてきた。

定常問題の場合にはディリクレ積分有限となるD-解や空間無限遠方で定数に適当なオーダーで収束するPR-解といった解の概念が確立されている。一方で、非定常問題の場合には時間局所解の存在であっても解析

の結果は少ない。3次元の場合には宮川（1982）による漸近的に定数になる時間局所解の存在の研究や、ガルディ等（2012）によるヘルダー空間での解析の結果が知られている。しかし2次元の場合には時間局所解の存在であっても不明であった。

2次元外部問題において重要な未解決問題の一つは大きな定数に漸近する定常解の存在である。ギルバーク・ワインバーガー（1974, 1978）やエイミック（1988）により、ディリクレ積分有限となる定常解は外部領域上有界となり、空間無限遠方で適当な定数に漸近することが証明されている。しかし大きな定数に漸近する定常解が存在するのことは依然として不明である。物理的には高レイノルズ数を持つ定常流が外部領域で存在するかという問題であるが、カルマン渦や境界層剥離など、実際の高レイノルズ数を持つ流れは非定常流である。（図2参照）

以上の考察から、特に2次元の場合に非定常流を解析する意義は大きいと考え、外部領域における非定常ナビエ・ストークス方程式を非減衰空間において解析する研究を計画した。領域が全空間の場合には、有界な非減衰初期値に対して滑らかな時間局所一意解が存在することが儀我等（1999）により証明されている。また2次元の場合には、時間大域解の一意存在が儀我等（2001）により、渦度方程式の解析に基づき証明されている。

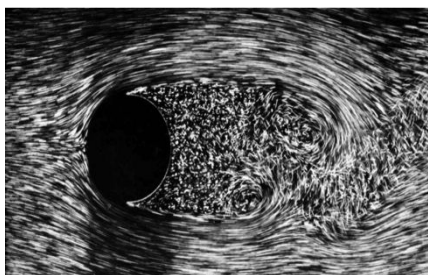


図2：障害物を横切る非圧縮粘性流。
（Milton Van Dyke, An Album of Fluid Motion より）レイノルズ数が高い場合、障害物後方では不規則な渦が生成される。（研究項目）

3. 研究の方法

(1) 外部領域における軸対称解
タイプ1 爆発解非存在の研究では、特異点付近で爆発解に対してタイプ1条件を仮定する。しかし全ての爆発解に対してタイプ1条件が満たされるかは不明である。キャファレリ等（1982）による部分正則性の理論を用いれば、全空間における軸

対称解の特異点は必ず軸対称軸上に位置することが従う。また境界がある場合にも、粘性の効果により境界上で軸対称解は爆発しないことがチェ等（2014）により予想されている。

本研究ではこの点に着目し、軸対称軸を除いた外部領域（次頁図3参照）において滑り境界条件の下で時間大域一意解を構成する問題を提唱し、研究の展開を図った。滑り境界条件の場合には渦度の方位角成分が境界上消えるため、外部領域においては渦度のアприオリ評価が得られる。軸対称旋回あり解についてはスケール臨界空間において様々な正則性判定法が知られているが、非自明な旋回を持つ時間大域解を構成した研究は少ない。

時間大域解の構成は旋回がない場合を扱ったラジゼンスカヤ（1968）の証明を元にまずガレルキン法を用いて行なった。この方法は初期時刻付近での平滑化効果を使わないため、初期条件について余分な正則性の仮定を必要とした。本研究開始後、ファルビック・ロステック（2016）は一樣正則領域に対するストークス半群の L^p 空間での解析性の結果を、滑り境界条件の場合に拡張した。これにより積分方程式に基づき時間大域解を構成するアプローチが可能になった。本研究ではガレルキン法での時間大域解の構成を行った後、積分方程式を用いて大域解を構成する研究を行った。初期値のクラスとしては旋回がない場合に時間大域解を構成できる L^3 かつエネルギー有限となるクラスを考え、渦度方程式の方位角成分に対するアприオリ評価に基づき解析を行った。また旋回成分については最大値原理により各点でのアприオリ評価を得るため、旋回成分にスケール臨界空間での減衰条件を課した。 L^3 ノルムが大きな初期値に対する時間大域弱解の存在はカルデロン（1990）、レマリエリュセット（2002）などの結果があり、最近ではセレギン・スペラック（2017）により研究が進められている。

(2) 外部領域における非減衰流

時間局所解の存在

代表者の先行研究（引用文献）を空間無限遠方非減衰となる有界関数空間へ拡張する方針で研究を行った。ストークス半群については先行研究（引用文献）により既に非減衰空間へと拡張ができていたが、ストークス半群とヘルムホルツ射影作用素、発散の合成作用素が非減衰空間上へ一意的な拡張を持つかは不明であった。このため代表者の先行研究（雑誌論文）で導出した合成作用素のアприオリ評価を広義一樣収束近似し、合成作用素を非減衰空間へと拡張する研究を行った。さらに非線形レベルでの近似を行い、有界な初期値に対して時間局所一意解を構成する研究を行った。

2次元時間大域一意解の構成
 得られた時間局所可解性の結果を元に2次元外部問題について、時間大域解を構成する研究を行った。2次元の場合にはD-解やPR-解の属する空間である有界かつディリクレ積分有限となる空間を考察し、この空間に属する初期値に対する時間大域一意解を研究した。時間大域一意解の構成にはストークス流からの摂動の議論を用いた。この空間は漸近的に定数となる初期値を含む。本研究では初期値が漸近的に定数となる場合に、構成した時間大域一意解の空間無限遠方の挙動の解析も行った。

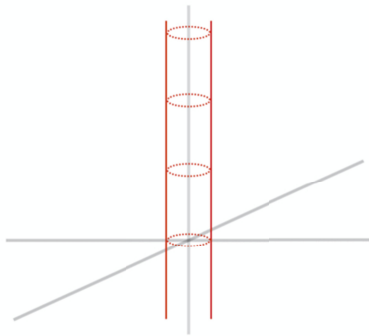


図 3：対称軸を含む円柱の外部領域（研究項目）

4. 研究成果

(1) 外部領域における時間大域軸対称旋回あり解の一意存在

外部領域上十分滑らかかつ減衰する軸対称旋回あり初期値に対して時間大域解をガレルキン近似により構成した。この結果はプレプリント（引用文献）として纏め、イギリスや韓国の研究集会で成果発表を行った。（学会発表、）さらに初期値が L_3 かつエネルギー有限となり速度場の旋回成分が減衰するスケール臨界空間に属する場合には、積分方程式に基づき時間大域一意解を構成した。この結果はセレギン氏との共同研究として纏め、草稿が完成した（引用文献）。

(2) 外部領域における非減衰流

非減衰初期値に対する時間局所マイルド解の一意存在
 先行研究の結果（引用文献）を先の手法により空間無限遠方で非減衰となる有界関数空間へと拡張し、有界関数空間でのマイルド解の一意存在を外部領域の場合に確立した。これにより特に2次元の場合に非減衰初期値に対して時間局所一意解が存在することを証明した。この結果は査読付き学術雑誌から出版された。（雑誌論文）また学術雑誌に投稿中であった合成作用素の

アプリアリ評価の論文を改訂した。（雑誌論文）

有界かつディリクレ積分有限な初期値に対する2次元時間大域一意解の存在
 有界かつディリクレ積分有限な初期値に対して時間大域一意解を構成した。証明は有界関数空間と斉次 L_2 ソボレフ空間の共通部分の空間を考え、この空間でのストークス半群の解析性を用いて、ストークス半群からの摂動がエネルギー有限なることを用いて示した。ストークス半群の解析性は代表者の先行研究（引用文献）の結果とストークス作用素の L_2 空間での分数冪の評価を組み合わせることにより示した。またこの系として空間無限遠方で定数に一樣収束する初期値に対して、解もまた各時刻で定数に一樣収束することを示した。これにより非定常問題の場合に大きな定数に漸近する時間大域一意解が存在することを証明した。この結果はプレプリントとして纏め、査読付き学術雑誌へと投稿した（引用文献）。

(3) 有界関数空間におけるストークス半群の解析性

研究項目(1),(2)の他に、大学院からの研究である有界関数空間におけるストークス半群の解析性の研究を儀我氏（東京大学）、シェーデ氏（ダルムシュタット工科大学）、鈴木氏（東京大学）と円柱領域に対して行い、空間無限遠方で減衰する連続関数空間においてストークス半群が C_0 -解析半群となることを証明した。この結果は査読付き学術雑誌から出版された。（雑誌論文）

<引用文献>

- K. Abe, Global well-posedness of axisymmetric Navier-Stokes equations in the exterior of an infinite cylinder, preprint 2015
- K. Abe, Global well-posedness of the two dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, arXiv:1608.06424
- K. Abe, Some uniqueness result of the Stokes flow in a half space in a space of bounded functions, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 7 (2014), 887-900
- K. Abe, The Navier-Stokes equations in a space of bounded functions, Commun. Math. Phys., 338 (2015), 849-865
- K. Abe, G.Seregin, Axisymmetric flows in an exterior domain, in preparation

K. Abe, Y. Giga, Analyticity of the Stokes semigroup in spaces of bounded functions, *Acta Math.*, 211 (2013), 1-46
K. Abe, Y. Giga, The L^p -Stokes semigroup in exterior domains, *J. Evol. Equ.*, 14 (2014), 1-28
K. Abe, Y. Giga, M. Hieber, Stokes resolvent estimates in spaces of bounded functions, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.*, 48(2015), 537-559
K. Abe, Y. Giga, K. Shade, T. Suzuki, On the Stokes semigroup in some non-Helmholtz domain, *Archiv der Mathematik*, 104 (2015), 177-187

5 . 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者
には下線)

[雑誌論文] (計 3件)

K. Abe, On estimates for the Stokes flow in a space of bounded functions, *J. Differ. Equ.*, 261 (2016), 1756-1795, DOI 10.1016/j.jde.2016.04.013
K. Abe, Y. Giga, K. Shade, T. Suzuki, On the Stokes resolvent estimates for cylindrical domains, *J. Evol. Equ.*, 17 (2017), 17-49, DOI 10.1007/s00028-016-0350-6
K. Abe, Exterior Navier-Stokes flows for bounded data, *Math. Nachr.*, 290 (2017), 972-985, DOI 10.1002/mana.201600132

[学会発表] (計 19件)

K. Abe, Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, Kyushu PDEs Seminar, Kyushu University, January 30, 2017
K. Abe, Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, Joint PDE school with UC Berkeley, the University of Tokyo, January 13, 2017
K. Abe, Exterior Navier-Stokes flows for bounded data, PDEs Seminar, UNIST, Ulsan, Korea, May 2, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the axisymmetric Navier-Stokes equations in the exterior of an infinite cylinder, PDEs Seminar, UNIST, Ulsan, Korea, April 29, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the axisymmetric Navier-Stokes equations in the exterior of an infinite

cylinder, PDEs Seminar, Yonsei University, March 15, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the axisymmetric Navier-Stokes equations in the exterior of an infinite cylinder, PDEs Seminar, Chung-Ang University, Seoul, Korea, March 11, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the axisymmetric Navier-Stokes equations in the exterior of an infinite cylinder, PDEs Seminar, Oxford University, Oxford, UK, January 25, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, Conference for young researchers on fundamental equations in Mathematical fluid dynamics, Nagoya University, January 9, 2017
K. Abe, Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, Synthetic studies on differential equations, Kyoto University, December, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, PDE seminar, Hokkaido University, October 21, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, Nagoya DE seminar, Nagoya University, October 3, 2016
K. Abe, Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data, Applied analysis seminar, Waseda University, October 1, 2016
K. Abe, On regularity of axisymmetric Navier-Stokes flows, Annual meeting of the Japan Society of Fluid Mechanics, Nagoya Institute of Technology, September 26, 2016
K. Abe, On regularity of axisymmetric Navier-Stokes flows in an exterior domain, Kagurazaka Analysis Seminar, Tokyo University of Science, July 23, 2016
K. Abe, On regularity of axisymmetric Navier-Stokes flows, 13th Kinosaki seminar, Kinosaki, February 18, 2016
K. Abe, On regularity of axially symmetric Navier-Stokes flows ,

Colloquium, Kyoto University,
October 7, 2015
K. Abe, Global well-posedness of the
two-dimensional exterior
Navier-Stokes equations for
non-decaying data, Annual Meeting
of Mathematical Society of Japan,
Tokyo Metropolitan University,
Tokyo, March 27, 2017
K. Abe, Exterior Navier-Stokes
flows for bounded data, Autumn
Meeting of Mathematical Society of
Japan, Kansai University, Osaka,
September 18, 2016
K. Abe, On regularity of
axisymmetric Navier-Stokes flows in
an exterior domain, Annual Meeting
of Mathematical Society of Japan,
Tsukuba University, Tsukuba, March
18, 2016

〔その他〕

ホームページ

<https://sites.google.com/site/kabehomepage/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部 健 (ABE, Ken)

京都大学・学際融合教育研究推進センター
・スーパーグローバルコース数学系ユニ
ット・特定助教

研究者番号： 80748327