

平成 30 年 5 月 14 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04776

研究課題名(和文)有限群の表現論におけるブルエ予想およびその周辺

研究課題名(英文)Broue's conjecture in representation theory of finite groups and related topics

研究代表者

越谷 重夫 (Shigeo, Koshitani)

千葉大学・先進科学センター・特任教授

研究者番号：30125926

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,500,000円

研究成果の概要(和文)：「ブルエ予想」を解くために必要である「スコット加群のブラウアー直既約性」に関して結果を得た。また「ブルエ予想の周辺」の予想である「アルペリン重み予想」および「アルペリン・マッカーイ予想」に関して、不足群が巡回群の場合について、3つの結果を得た。ブルエ予想の周辺に関連する、自己準同型自明加群の研究に関して、未解決であった2面体群の場合を解いた。すべて、延べ4人の海外研究者との共同研究であった。これらを2015年ドイツ・オーバーヴォルフアッハ、イエーナ大学、2016年スイス・スイス連邦工科大学ローザンヌ校、2017年カナダ・バンフで招待講演を行った。

研究成果の概要(英文)：In order to solve "Broue's conjecture" we must have the Brauer indecomposability of the Scott modules. We proved it for some cases. As related topics of Broue's conjecture we have two conjectures, say "Alperin's weight conjecture" and "Alperin-McKay conjecture". For the case where the defect group is cyclic we have obtained three results. There is also an important notion "Endo-trivial modules" related to the conjectures. We proved it for dihedral defect groups case which had been an open problem. All the work was joint one with four persons in the UK and Germany. I gave invited talks e.g. in Oberwolfach and Jena in Germany 2015, in EPFL in Lausanne Switzerland 2016, and also in Banff Canada 2017.

研究分野：数物系科学

キーワード：ブルエ予想 アルペリン重み予想 アルペリン・マッカーイ予想 表現論 ブロック 自明自己準同型加群

1. 研究開始当初の背景

(1) ブルエ予想は 1988 年にブルエ(パリ第 7 大学教授)によって提言された。代数学における表現論のみならず、より広い他分野にも大きな影響を与える非常に重要な予想である。有限次元直既約表現全体が有限個(有限型)である場合、そして無限型であってもタイム(tame)型と呼ばれる良い性質を持っている場合には、ブルエ予想はリッカード、リンクルマン、ルキエ等によって、既に解決されていた。

(2) 一方、タイム型以外の無限表現型のブロックに対しては、有限群が対称群、線型群などの場合を除いては、単発の幾つかの結果があるだけであった(筆者の研究を幾つか含む)。

(3) また主題のブルエ予想と非常に関係が深い重要な予想として、アルペリン重み予想およびアルペリン・マッカイ予想がある。このうち、マッカイ予想を、有限単純群の分類を使って解こう、という大計画が 2007 年の重要論文(著者アイザックス、マレ、ナヴァロ)で発表された。マレの元学生のシュペートはこのアイデアをアルペリン・マッカイ予想およびアルペリン重み予想にも適用して、彼女の帰納的条件を発見した。これらの帰納的条件が実際にどのくらい有効、役に立つかが不確定であったのが 27 年初めくらいまでの状況であった。

2. 研究の目的

(1) 重要な有限単純群、特に散在型単純群およびその被覆群に対して、ブルエ予想、詳しく言うとブルエの可換不足群予想を解くことを目標とした。

(2) ブルエ予想を解くために必要なそして役立つ道具となり得る定理、補題、理論を作る。例えば、スコット加群のブラウアー直既約性など。

(3) ブルエ予想の周辺の重要な予想、アルペリン・マッカイ予想およびアルペリン重み予想を解くために非常に役立つ帰納的条件が、ドイツ・シュペートたちによって得られている。不足群が巡回群の場合には、この帰納的条件が成立することを証明することを目的とした。

3. 研究の方法

(1) ブルエ予想、およびそれと非常に関係が深いアルペリン重み予想、アルペリン・マッカイ予想に関連する研究をしている海外の世界一流の研究者たちを訪問し、彼ら彼女らと直接、議論討論を行った。具体的には、27 年 4 月にドイツ・オーバーヴォルフアッハ数学研究所に招待され、研究連絡および研究発表を行った。同年 7 月にはドイツ・イエーナ

大学での研究集会で招待講演を行い、また研究打ち合わせを行った。28 年度は 7 月、9 月、12 月と 3 回スイス連邦工科大学ローザンヌ校に招待され、2 回招待講演を行った。29 年度には、カナダ・バンフ国際研究ステーションおよびドイツ・アイヒシュテット大学での研究集會に招待され両方で招待講演を行った。研究打ち合わせも行った。これら以外にも、ドイツ・カイザースラウターン工科大学を数回訪問し、幾つかの共同研究を行った。10 編の論文中 9 編は共同研究であるが、カイザースラウターン工科大学でそのうちの 5 編が産み出された。

(2) 国内研究集會でも、ブルエ予想およびそれに関連する話題に関しての、今回の研究で得られた結果を発表した。京都大学数理解析研究所、代数学シンポジウム、環論表現論シンポジウムなどである(すべて招待講演)。またこれらの研究集會の最中に、研究打ち合わせをした。

4. 研究成果

(1) 有限単純群の中で非常に重要なものとしてリー型単純群がある。これは有限体上で定義されているが、この体の標数と考えているモジュラー表現の係数体の標数が一致している場合に、自明加群の射影被覆を考察した。ドイツ・ミュラーとの共同研究。

(2) シロー 2 部分群が二面体群である勝手な有限群に対して、標数 2 における自明自己準同型加群の分類を完成させた。ドイツ・ラシュールとの共同研究である。

(3) 巡回不足群を持つ 2 ブロックは、帰納的アルペリン・マッカイ条件を満たすことを証明した。ドイツ・シュペートとの共同研究。

(4) 巡回不足群を持つ p ブロックは(ただし p は奇素数)、帰納的アルペリン・マッカイ条件およびブロックごとのアルペリン重み条件を満たすことを証明した。上記、シュペートとの共同研究。

(5) 標数 2 の有限群代数の自明表現に対するカルタン不変数が 2 の場合の有限群を完全に決定した。有限単純群の分類を用いている。

(6) ブラウアーが定義した誘導ブロックに関してのクリフオード理論をより使いやすいものに精密化した。デイドの定理を使っている。ドイツ・シュペートとの共同研究。

(7) シロー 2 部分群がクライン 4 群である任意の有限群に対して、における自明自己準同型加群の分類を完成させた。ドイツ・ラシュールとの共同研究である。

(8) 整環上有限群代数を考える。これは対称

代数であるが、これの商代数も対称代数になる場合について考察した。十分条件等を求めた。イギリス・ケサール、リンケルマン2名との共同研究である。

(9) スコット加群のブラウアー商を考えそれが直既約性を保つ場合の十分条件を与えた。ブルエ予想をチェックするのに役立つ定理である。イギリス・ケサール、リンケルマンとの共同研究。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① Shigeo Koshitani and Jurgen Mueller, The projective cover of the trivial representation for finite groups of Lie type in defining characteristic, 査読有, Algebra Colloquium 24 (2017), 439—452.
DOI: 10.1142/S100538671700281

② Shigeo Koshitani and Caroline Lassueur, Endo-trivial modules for finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, 査読有, Journal of Group Theory 19 (2016), 635—660.
DOI: <https://doi.org/10.1515/jgth-2015-0044>

③ Shigeo Koshitani and Britta Spaeth, The inductive Alperin-McKay condition for 2-blocks with cyclic defect groups, 査読有, Archiv der Mathematik 106 (2016), 107—116.
DOI: 10.1007/s00013-015-0852-4

④ Shigeo Koshitani and Britta Spaeth, The inductive Alperin-McKay and block-wise Alperin weight conditions for blocks with cyclic defect groups, 査読有, Journal of Group Theory 19 (2016), 771—813.
DOI: <https://doi.org/10.1515/jgth-2016-0006>

⑤ Shigeo Koshitani, Jurgen Muller and Felix Noeske, Broue's abelian defect group conjecture and 3-decomposition numbers of sporadic simple Conway group Co₁, 査読有, Journal of Pure and Applied Algebra 219 (2015), 142—169.
DOI: [j.jpaa.2014.04.014](https://doi.org/10.1007/s10003-014-0401-4)

⑥ Shigeo Koshitani, Finite groups whose Cartan invariants over a field of characteristic two is two, 査読有, Journal of Algebra 426 (2015), 259—272.
DOI: [j.jalgebra.2014.12.024](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.12.024)

⑦ Shigeo Koshitani and Britta Spaeth,

Clifford theory of characters in induced blocks, 査読有, Proceedings of the American Mathematical Society 143 (2015), 3687—3702.

DOI: 10.1090/proc/12431

⑧ Shigeo Koshitani and Caroline Lassueur, Endo-trivial modules for finite groups with Klein-four Sylow 2-subgroups, 査読有, Manuscripta Mathematica 148 (2015), 265—282.

DOI: 10/1007/s00229-015-0739-5

⑨ Radha Kessar, Shigeo Koshitani and Markus Linckelmann, On symmetric quotients of symmetric algebras, 査読有, Journal of Algebra 442 (2015), 423—437.

DOI: 10.1016/j.algebra.2014.05.035

⑩ Radha Kessar, Shigeo Koshitani and Markus Linckelmann, On the Brauer indecomposability of Scott module, 査読有, Quarterly Journal of Mathematics 66 (2015), 859—903.

DOI: 10.1093/qmath/hav010

[学会発表] (計 11 件)

① Shigeo Koshitani, Yet Brauer indecomposability of the Scott module, ドイツ・アイヒシュテット大学, 表現論の日々 (Darstellungstheoretage 2017) (招待講演, 国際学会), 2017 年 11 月 10 日.

② Shigeo Koshitani, Puig equivalence conjecture for 2-blocks, カナダ・バンフ国際研究ステーション, New Perspectives in Representation Theory of Finite Groups (招待講演, 国際学会), 2017 年 10 月 19 日.

③ Shigeo Koshitani, Source algebra version of Donovan's conjecture for finite group algebras, 山梨大学, 第 50 回環論および表現論シンポジウム (招待講演, 国際学会), 2017 年 10 月 9 日.

④ Shigeo Koshitani, Simple modules in the Auslander-Reiten quivers for finite group algebras, 山梨大学, 第 50 回環論および表現論シンポジウム (招待講演, 国際学会), 2017 年 10 月 7 日.

⑤ Shigeo Koshitani, 有限群の表現論における局所大域予想--最近 5 年間の大きな進展, 第 62 回代数シンポジウム (招待講演), 2017 年 9 月 7 日.

⑥ Shigeo Koshitani, Simple modules in the stable Auslander-Reiten quivers for finite group algebras, 京都大学数理解析研究所, RIMS 研究集会 有限群のコホモロジ

一論とその周辺 (招待講演), 2017年2月16日.

⑦ Shigeo Koshitani, The Z^* -theorem from source algebras point of view, スイス連邦工科大学ローザンヌ校, Morita Equivalence Problem for Blocks of Finite Groups0 (招待講演, 国際学会), 2016年9月9日.

⑧ Shigeo Koshitani, Yet small 1-PIMs, スイス連邦工科大学ローザンヌ校, Endo-p-permutation and Trivial Source Modules in the Representation Theory of Finite Groups (招待講演, 国際学会), 2016年9月2日.

⑨ Shigeo Koshitani, Endo-trivial modules for finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, 京都大学数理解析研究所, RIMS 研究集会 有限群とその表現、頂点代数作用素、代数的組合せ論の研究 (招待講演, 国際学会), 2016年1月8日

⑩ Shigeo Koshitani, Endo-trivial modules in dihedral Sylow 2-subgroups case, ドイツ・イェーナ大学, Blocks of Finite Groups Beyond (キュルスハンマー教授 60 才記念) (招待講演, 国際学会), 2015年7月24日.

⑪ Shigeo Koshitani, Endo-trivial modules revisited, ドイツ・オーバーヴォルフアッハ数学研究所, 有限群の表現論 (招待講演, 国際学会), 2015年4月9日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

越谷 重夫 (KOSHITANI, Shigeo)

千葉大学・先進科学センター・教授

研究者番号: 30125926

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

(4) 研究協力者