

令和元年6月14日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04779

研究課題名(和文) 連分数を用いた実二次体の研究

研究課題名(英文) Study of real quadratic fields by using continued fractions

研究代表者

岸 康弘 (Kishi, Yasuhiro)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：60380375

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、ある二次無理数の連分数展開を主として扱っている。偶数周期の最小元の連分数展開が持つ性質を見つけ、それらの間にあるいくつかの関係を導いたことが本研究の主要な結果である。さらに、類数公式や横井不変量を用いることにより、ある実二次体の系列に対して類数の下からの評価を与えた。その結果、自明でない類数を持つ実二次体の族を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の第1の学術的意義は、部分商の最大値やその個数、実二次体の類数、分岐の様子など様々な性質を関連づけた点である。連分数から導かれる情報は多種多様であるが、それらをそれぞれに意味づけし整理することは、今後の研究にも不可欠である。第2の意義は、ある条件を満たす代数体を明示的に与えた点である。様々なケースにおいて扱いやすいものを具体的に与えることは、学術的貢献に値すると考える。

研究成果の概要(英文)：The present research has mainly dealt with the continued fraction expansions of certain quadratic irrationals. The main results have been to find some properties of that of the minimal elements with even period and to obtain some relations between them. Moreover, we gave a lower bound for the class numbers of certain real quadratic fields by using the class number formula and the Yokoi invariant. As a result, we got a family of real quadratic fields with non-trivial class number.

研究分野：整数論

キーワード：数論 連分数 二次体 イdeal類群 類数

1. 研究開始当初の背景

代数体のイデアル類群の位数は類数と呼ばれ、代数体の整数環における既約元への一意分解性のずれを表す不変量として、代数的数論において古くから研究の対象となっている。しかしながら、2次体の類数に関してですらその値は明確に捉えられず、数多くの未解決問題が残っている。1801年にカール・フリードリヒ・ガウスは「類数が1の実2次体は無限に存在する」ことを予想した。これは現在、実2次体に関するガウス予想と呼ばれている問題であり、この予想も未だ解かれてはいない。

古くより、実2次体の類数には連分数との関わりが知られていた。類数公式に基本単数の値が現れ、基本単数は連分数により求められるからである。一般に、Siegelの定理により類数が1の実2次体の基本単数は大きくなければならず、よく知られた、ERD型(extended RD-type)の実2次体には類数1のものが有限個しか存在しないという事実は、ERD型の実2次体の基本単数が明示的に表され、その大きさが小さいことより示される。しかしながら、一般の実2次体においては基本単数の振る舞いを捉えることは難しく、決定的な結果が存在しないまま、この問題はあまり進展がなかった。

2008年、本研究の研究分担者である富田氏と研究協力者である河本氏によって、2次無理数の連分数展開から定義される「極小型」という概念が導入された。それと同時に、極小型でない実2次体の中で類数が1のものは高々52個だけであることが示された。このことより、類数が1の実2次体を見つけるためには極小型であるものから探さなければならないこととなる。さらに、次のような数値実験が河本-富田によってなされている。4 \nmid dを満たす平方でない正の整数dに対し、dが4を法として2または3と合同ならば $(d) = \sqrt{d}$ と定義し、4を法として1と合同ならば $(d) = (1 + \sqrt{d})/2$ と定義する。また、 (d) の単純連分数展開の最小周期を $\ell(d)$ で表す。4 \nmid dを満たす平方でない正の整数dのうち、 $\ell(d) = \ell$ となる最小のdを周期 ℓ の最小元という。dを8億まで走らせたとき、63948以下の周期 ℓ に対し、各周期の最小元が $\ell = 7, 11, 49, 225, 299, 1032$ の例外を除いて類数1の実2次体を与える。さらに、 $\ell = 1, 2, 3, 4, 7, 1032$ の場合を除き、 $Q(\sqrt{d})$ は極小型実2次体となる。このことが各周期の最小元を捉えることを本研究の目的とした理由である。

次に、dの条件を4を法として2または3と合同になるものに制限する。このとき、8億までの数値実験では各偶数周期の最小元は例外なく類数1の実2次体を与えている。また、偶数周期の最小元の特徴として、 $(d) = \sqrt{d}$ の連分数展開の部分商がある合同式を満たすことを、研究代表者の岸と河本-富田は見出した。我々はこの性質を「末尾急増型」と呼んでいる。さらに、末尾急増型の性質を満たす有限列の構成法を、我々3名及び名古屋大学の鈴木浩志氏によって明らかにした。より具体的には、すべての末尾急増型の有限列は5つの増殖変換と3つの核の組み合わせにより作られるのである。この増殖変換の個々の性質を調べること、またどのような増殖変換の組み合わせが最小元を与えるのかを調べることを課題として研究を始めた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、実2次体に関するガウス予想の解決を見据えながら、各周期の最小元の構成法を見つけることである。数値実験により、各偶数周期の最小元が満たす性質として、連分数展開が「末尾急増型」であることがわかっている。さらに、最小元を与える実2次体は類数が1の「極小型」と呼ばれる実2次体となっている。末尾急増型となる実2次無理数の性質や極小型となる実2次体の性質を調べ、また最小元を持つさらなる性質を見出し、最小元の構成方法を考案する。

3. 研究の方法

理論面の考察と数値実験を同時に行っていく。上記「1. 研究開始当初の背景」で述べた通り、 (d) の単純連分数展開から周期ごとにdを並べ、最小元として得られたdに対する (d) の連分数展開の部分商を解析することが、我々の研究の方法である。今までの研究経過を見ると、数値実験が欠かせない研究方法であった。数値実験の結果が理論的発展を促し、さらに理論的発展が新たな数値実験を促したのである。研究分担者の富田氏の主導の下で、計算機を利用した様々な数値実験を行い、得られたデータを基に、研究代表者の岸と研究協力者の河本氏を中心として何らかの性質を見出していく。

4. 研究成果

- (1) 11億までのデータが集まり、各周期の最小元を持つ性質に関する我々の予想に反例は見つからなかった。さらに、 $\ell = 14$ の場合を除く偶数周期の最小元が満たす性質をいくつか発見し、それらの間に関係を見出した。このことについては、現在論文にまとめているところである。
- (2) 類数公式や横井不変量を利用して実2次体の類数を下から評価し、特定の増殖変換から作られた末尾急増型の有限列から構成される実2次体の類数が1とならないことを示した。
- (3) 島根大学の青木美穂氏との共同研究により、類数が5で割れる虚2次体のペアの無限族がある4次多項式の根となるような4次体の単数を利用して構成した。さらに、この結果を8を法として5と合同な素数pに拡張し、類数がpで割れる $(p-1)/2$ 次巡回体のペアの無限族の構成に成功した。
- (4) その他、代数体のイデアル類群の構造や類数の可除性に関して次の結果を得た。

東京理科大学の小松亨氏との共同研究により、イデアル類群の 3-rank が 3 以上となる虚 2 次体の無限族を構成した。

朝鮮大学校の Kwang-Seob Kim 氏との共同研究により、類数が 5 で割れるような 2 次体の無限族を構成した。

ハリスチャンドラ研究所の Kalyan Chakraborty 氏, Azizul Hoque 氏及びインド科学教育研究大学ベランプール校の Prem P. Pandey 氏との共同研究により、与えられた任意の奇数 n に対し、 n 次巡回群を部分群に持つようなイデアル類群を持つ虚 2 次体の無限族を構成した。

(5) 研究成果の発表については、14 件の口頭発表を行い、また論文 9 編に対して査読有の国際誌への掲載が決定している。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 9 件)

M. Aoki and Y. Kishi, A family of pairs of imaginary cyclic fields of degree $(p - 1)/2$ with both class numbers divisible by p , Ramanujan Journal (掲載決定済). 査読有.

[DOI:10.1007/s11139-018-0085-9](https://doi.org/10.1007/s11139-018-0085-9)

F. Kawamoto, Y. Kishi, H. Suzuki and K. Tomita, Real quadratic fields, continued fraction expansions, and a construction of primary symmetric parts of ELE type, Kyushu Journal of Mathematics 73 (2019), no. 1, 165--187. 査読有.

[DOI:10.2206/kyushujm.73.165](https://doi.org/10.2206/kyushujm.73.165)

K. Chakraborty, A. Hoque, Y. Kishi and P. P. Pandey, Divisibility of the class numbers of imaginary quadratic fields, J. Number Theory 185 (2018), 339--348. 査読有.

[DOI:10.1016/j.jnt.2017.09.007](https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.09.007)

M. Aoki and Y. Kishi, An infinite family of pairs of imaginary quadratic fields with both class numbers divisible by five, J. Number Theory 176 (2017), 333--343. 査読有.

[DOI:10.1016/j.jnt.2016.12.007](https://doi.org/10.1016/j.jnt.2016.12.007)

F. Kawamoto, Y. Kishi, H. Suzuki and K. Tomita, A construction of real quadratic fields of minimal type and primary symmetric parts of ELE type; in "Algebraic Number Theory and Related Topics 2014", RIMS Kokyuroku Bessatsu B64 (2017), 107--121. 査読有.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>

K.-S. Kim and Y. Kishi, A remark on the Lavallee-Spearman-Williams-Yang family of quadratic fields, Math. J. Okayama Univ. 59 (2017), 113--116. 査読有.

<http://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou/mjou59/index.html>

T. Komatsu and Y. Kishi, Imaginary quadratic fields whose ideal class groups have 3-rank at least three, J. Number Theory 170 (2017), 46--54. 査読有.

[DOI:10.1016/j.jnt.2016.06.019](https://doi.org/10.1016/j.jnt.2016.06.019)

F. Kawamoto, Y. Kishi and K. Tomita, Continued fraction expansions with even period and primary symmetric parts with extremely large end, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli 64 (2015), no. 2, 131--155. 査読有.

[DOI:10.14992/00011773](https://doi.org/10.14992/00011773)

M. Aoki and Y. Kishi, On systems of fundamental units of certain quartic fields, Int. J. Number Theory 11 (2015), no. 7, 2019--2035. 査読有.

[DOI:10.1142/S1793042115500864](https://doi.org/10.1142/S1793042115500864)

[学会発表](計 14 件)

Y. Kishi, Finite sequences of ELE type and a lower bound for the class number of certain real quadratic fields, International Conference on Class Groups of Number Fields and Related Topics-2018, 2018 年.

河本史紀, 岸康弘, 鈴木浩志, 冨田耕史, 偶数周期の最小元の性質について, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 2018 年.

河本史紀, 岸康弘, 鈴木浩志, 冨田耕史, ある実 2 次体の系列における類数の下からの評価, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 2018 年.

岸康弘, 類数が p で割れる代数体のペアの構成, 2017 大分熊本整数論研究集会, 2017 年.
岸康弘, On some properties concerned with the continued fraction expansions of \sqrt{d} with even period, International Conference on Class Groups of Number Fields and Related Topics, 2017 年.
岸康弘, $Q(\sqrt{x^2 - t^n})$ 型虚 2 次体の類数の n -divisibility, 学習院整数論研究集会, 2017 年.
岸康弘, 各偶数周期の最小元が持つ性質について, 北陸数論セミナー, 2017 年.
岸康弘, 連分数展開における各偶数周期の最小元が持つ性質, 東京理科大学談話会, 2017 年.
小松亨, 岸康弘, イdeal類群の 3 ランクが 3 以上になる虚 2 次体の族について, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年.
青木美穂, 岸康弘, 類数が 5 で割れる虚 2 次体のペアの無限族について, 平成 27 年度日本数学会中国・四国支部例会, 2016 年.
岸康弘, 3-rank が 3 以上のイdeal類群を持つ虚 2 次体の構成, 新潟代数セミナー, 2015 年.
岸康弘, 3-rank が 3 以上のイdeal類群を持つ虚 2 次体の族について, 首都大整数論セミナー, 2015 年.
岸康弘, イdeal類群の 3-rank が 3 以上となる虚 2 次体の構成, 愛知数論セミナー, 2015 年.
岸康弘, Imaginary quadratic fields whose ideal class groups have 3-rank at least three, 29th Journées Arithmétiques, 2015 年.

[その他]

ホームページ等

<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/paperE.html>

<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/talkE.html>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：富田 耕史

ローマ字氏名：(TOMITA, Koshi)

所属研究機関名：名城大学

部局名：理工学部

職名：准教授

研究者番号(8桁): 50300207

(2)研究協力者

研究協力者氏名：河本 史紀

ローマ字氏名：(KAWAMOTO, Fuminori)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。