

令和 2 年 6 月 16 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04802

研究課題名(和文)リー型の組合せ論と有限群上の調和解析

研究課題名(英文)Combinatorics of Lie type and harmonics analysis on finite groups

研究代表者

水川 裕司 (Mizukawa, Hiroshi)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群  
・教授

研究者番号：60531762

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究によって環積のゲルファントペアについての理解が極めて深まった。とくに、エーレンフェストの壺モデルという古典的な物理モデルに関して大きな進歩が得られた。従来は複数の壺のモデルに対して、壺の間の相互作用は無いものが考えられてきたが、有限群の作用から生じる壺間の相互作用を構成し、拡散の漸近挙動を調べることで、多くのカットオフの例を作ることが出来た。また、対称群のモジュラー表現と深い関係にある類正則と呼ばれる分割の和因子に関する合同関係式を研究し、特に多成分の類正則分割たちに関する分割恒等式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2つ壺の中に入った複数のボールが壺の間を移動する、というモデルをエーレンフェストの壺モデルという。これは繋がれた2つの容器の間を行き来するガスの拡散のモデルである。時間が立つと、ボールは十分に"まざる"のだが、その様子を群論的に調べることができる。この研究では、壺の数を増やし、壺の間に移動の制限を与えるとこのモデルを環積のゲルファントペアを用いて構成し、拡散の詳細な様子を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this research, we reached deep understanding of Gelfand pairs of wreath products. Specially, we made great advances in the Ehrenfest's urn models which are an classical physical model of gas diffusion. Much literature on the subject did not dealt with interactions between urns. But our research constructed interactions arising from finite group actions between the many urns. Moreover we analyzed asymptotic behavior of our models and showed the cut-off phenomenon in many models. Moreover we study the class regular partitions which have deeply connection with the modular representation theory of the symmetric groups. And we get partition identities for multi-component version of class regular partitions.

研究分野：表現論

キーワード：指標 球関数 有限等質空間 群作用で不変な確率空間

## 1. 研究開始当初の背景

本研究は組合せ論的な視点から表現論を取り扱う、リー型の組合せ論に関するものである。リー型の組合せ論は、一般の代数系ではなく、リー群やリー環の表現を起源とするものおよび、その一般化を研究対象とする特殊代数学というべき分野である。本来、表現論は関数解析的、あるいは純代数的な枠組みで発展してきたが、そこに組合せ論という新しい手法を導入することで、数学のそれほど華やかでない、日陰者であった組合せ論が見事に現代数学の枠に組み込まれたことは数学の発展の中でも大きな出来事である。この視点は、研究においてはじめの時点では難解なものがあったとしても、その組合せ論的な構造を抽出することによって、その対象を明快な（つまり簡単な）方法で調べることができる、という重要な側面を持つ。

さて、この研究では有限群のなす等質空間（有限等質空間）が主な研究対象であるが、様々な有限等質空間でも Weyl 群やそれらの一般化のようなリー群の表現論に起源を持つようなものを調べる。これらを考えるときに興味があるのは、等質空間の球関数たちがどのような表示を持つのか、ということ及び、等質空間にもとの有限群の個性がどのくらい現れているか、ということである。前者の間に対しては 1970 年代から、Vere-Jones や Dunkl あるいは Stanton といった研究者たちにより、Askey スキームに現れる様々な古典直交多項式たちによって球関数を実現できることが解き明かされ、最終的には Leonard によって、一変数直交多項式と  $P, Q$ -アソシエーションスキームたちの球関数の間の重要な関係が示された。一方、多変数のものはあまり例も知られていなかったが、シュバレー群の Gelfand ペアの帯球関数がマクドナルド多項式と深い関係にあるといったことや、私自身の業績で複素鏡映群の Gelfand ペアから多変数超幾何関数型の直交多項式が得られることなどが知られていた。これらのことをより深く、またこれらのなす有限等質空間の良い解釈は何であるか、ということの研究が必要があると思われた。

上記とはすこし別の視点だが、リー型の組合せ論において最大のツールはヤング図形、あるいは整数の分割であり、これは何を研究する際にも登場する。特に、quotient と core という分割の割り算の概念があり、これらは対称群のモジュラー表現を記述する言葉であり、また、不思議なことに無限次元リー環の表現を記述する言葉でもある。この不思議な関係に以前から興味があり、例えば、新しい分割恒等式を見つけたり、それらを無限次元リー環の表現論と結びつけたりすることも重要と考えた。

## 2. 研究の目的

研究の大きな目的はリー型の組合せ論に現れる有限群やあるいはその類似である代数系より得られる多変数の直交多項式とは何かを明らかにすることである。これは大きな問題であり、例えば、分類を考えるにしてもその方法にも定まったものがあるわけではない。したがってできるだけ多くの例を発見することは分類の下地を作る意味で重要なことである。

また、例を作る上で Gelfand ペアを見つけて、それらの帯球関数を決定することで確かに群論的な成果を上げることができる訳だが、ここでせつかく構成した等質空間のことをちゃんと調べないのは片手落ちであると考えた。等質空間には群作用があるのだから、それを利用してこの等質空間にもっと個性を与えるのは有益であると思われる。私と田中太初の業績であるが、任意の Gelfand ペア  $(G, H)$  に対して、それぞれの対称群との環積を作ることができるペア  $(G \text{ wr } S_n, H \text{ wr } S_n)$  もやはり Gelfand ペアであり、これの帯球関数がすべて Aomoto-Gelfand の超幾何関数で表すことができるということが知られている。このペア  $(G \text{ wr } S_n, H \text{ wr } S_n)$  は非常に多くの例を含むにも関わらず、帯球関数は環積の構造を反映して基本的に同じ表示を持っている。これには一定の満足感はあるが、もとの  $(G, H)$  の個性はどのように現れるのかを解き明かしたいとも思った。これに関して、1980 年代に Diaconis らが、 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H$  を単位元からなる  $G$  の部分群としたときの等質空間が古典的な物理モデルである Ehrenfest の壺モデルとして解釈できることを明らかにした。これは何かというと、2つの壺の中を複数のボールが移り合う、というモデルである。Diaconis らはボールの拡散の漸近挙動を帯球関数を巧妙に使い調べることで、カットオフというある瞬間に急激に拡散し一様化する、という現象が起きることを突き止めた。さらに、その後、Hora によって、これの壺の数を増やしたバージョンの研究などがなされた。前述のペア  $(G \text{ wr } S_n, H \text{ wr } S_n)$  を用いて Hora のケースをなぞることもできるのだが、それでは  $(G, H)$  の個性は全く現れないことに気が付き、もう少しアイデアを追加する必要があると思いを突き止めることにした。

さらに、熊本大学の山田裕史氏や明海大学の中島達洋氏と共同で、分割の割り算アルゴリズムと無限次元リー環に深く関係する KP 階層などの可積分系についても研究をすることにした。その中で興味があるのは、ひとつは対称群の指標表を行列に見立てて、その小行列式に関する

る様々な恒等式を考えることである。これに関して、Olsson や Bessenrodt が様々な公式を発見している。これは組合せ論としても対称群の表現としても面白い現象で、これに類似した恒等式などを見つけるのには興味がある。また、もうひとつとして佐藤幹夫による様々な KP 階層に関する考察、実験を再検証し、分割でパラメトライズされる対称関数たちとの関係を探ることも目的とした。

### 3. 研究の方法

研究の主な手法は、論文や書籍などの文献を調べることが中心であった。Gelfand ペアへのアプローチとして、環積を始めとした半直積群の構造が帯球関数の性質に深く関係していることに注目した。既存の Gelfand ペアであっても、それを元に何らかの半直積群を作ることによって、一般化し、新たな Gelfand ペアができると、帯球関数は既知のものを大幅に一般化したものが得られることがある。そのための道具として、環積の概念の一般化と考えられる Crested Product について文献を集め、調べた。また、有限等質空間の確率空間としての性質を調べるために、パイオニアである Diaconis やそこから派生した多くの研究について調べた。この際確率論の知識が必要になるため、これに関する教科書を読み込むことも行った。

さらに、自分の過去の研究を再検討し、ノートを整理することで、帯球関数を生み出すための行列の構成などを行うことができた。

また、様々な計算の途中で多くの例を作り、さらなる一般化や良い見通しを得るために、多くの数値計算を行った。その際利用したソフトは Mathematica および、フリーウェアの Sage である。とくに、Sage は高等数学に特化した様々なパッケージが準備されているので大いに活躍した。その中でも対称関数に関するパッケージによって予想を検証したり、証明したことを確認したり出来たのは特筆すべき事項である。また、これらのソフトを利用するにあたって高性能な iMac があることでかなりの時間の節約を生み、その結果より多くの例を手掛けることが出来た。

また、多くの研究集会に参加したり、研究打ち合わせを行うことで、多くの有益な知見を手に入れることができた。やはり、直接、共同研究者たちと長い時間議論を行うことは研究をする上で最も良い方法であると思った。

### 4. 研究成果

(1) Gelfand ペア  $(GwrSn, HwrSn)$  の等質空間を Ehrenfest の壺モデルの一般化とみなし、詳細に調べた所、壺の間に相互作用を群  $G$  の作用によって導入できることを明らかにした。このことによって、“大きな” Gelfand ペア  $(GwrSn, HwrSn)$  に対する“小さな” Gelfand ペア  $(G, H)$  の特性を記述することに成功した。さらに、この例によってたくさんの壺の間に相互作用のあるモデルを構成できただけでなく、ボールの拡散過程の確率収束を評価することにより、これらのモデルの中で多くの cut-off 現象が観測されることを明らかにした。

(2) 熊本大学の山田裕史氏とともに多成分の類共役分割を考え、それらの個数に関する分割恒等式を証明した。また、その応用として 1 成分の場合を利用することで Bessenrodt-Olsson-Staley による対称群の指標表の小行列式に関する恒等式の再証明を与えた。

(3) 研究科生（大学院生に相当）であった齋藤宙と共同で、対称群が 2 点の置換として作用する場合の環積の表現論を構成した。その群とある部分群のなす Gelfand ペアを考え、帯球関数を決定した。

(4) (ねじれ) Gelfand ペアからできるある行列の固有値として帯球関数が現れることを明らかにした。一般論を構成した後、具体的な Gelfand ペア  $(S2n, Hn)$  からどのようにすると行列を構成してやるとよいかを組合せ論的に構成することが出来た。

(5) 熊本大学の山田裕史氏と明海大学の中島達洋氏とともに、KP 階層におけるシューアの  $Q$ -関数についてのある公式を予想した。そのうちヤング図形が深さ 2 以下の場合については正しいことを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Mizukawa Hiroshi	4. 巻 108
2. 論文標題 Interactions between Ehrenfest's urns arising from group actions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1717 ~ 1728
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-017-1043-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Mizukawa and Hiro-Fumi Yamada	4. 巻 47
2. 論文標題 Arithmetic identities for class regular partitions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 205 ~ 221
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1520928067	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 水川裕司	4. 巻 2039
2. 論文標題 Gelfand pairs and determinants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 106 ~ 111
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 水川裕司, 山田裕史	4. 巻 1998
2. 論文標題 正則分割の組合せ論	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 88-95
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 水川 裕司, 中島 達洋, 山田 裕史	4. 巻 1945
2. 論文標題 アフィンリー環A(2)の基本表現から生ずるシューア関数たちの恒等式	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録 組合せ論的表現論の展望	6. 最初と最後の頁 115-124
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 水川 裕司, 山田 裕史	4. 巻 1965
2. 論文標題 正則分割の組合せ論と対称群の指標表	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究	6. 最初と最後の頁 91-100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計6件(うち招待講演 5件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Hiroshi Mizukawa
2. 発表標題 Finite Geifand pairs -examples and applications
3. 学会等名 熊本大学 群論・組合せ論・表現論セミナー(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 水川裕司
2. 発表標題 環積のGelfandペアによるEhrenfestの壺モデルへのアプローチ
3. 学会等名 横浜国立大学 今野・竹居研究室セミナー(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 水川裕司
2. 発表標題 Gelfand pairs and determinants
3. 学会等名 RIMS研究集会「リー型の組合せ論」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 水川裕司
2. 発表標題 群作用とEhrenfestの壺モデル
3. 学会等名 室蘭工業大学数理科学談話会(招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 水川裕司
2. 発表標題 有限群のゲルファントペアとその応用
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 水川裕司
2. 発表標題 有限群の調和解析とその応用
3. 学会等名 広島岡山代数学シンポジウム
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----