

令和 2 年 6 月 26 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04811

研究課題名（和文）対数アーベル多様体の幾何とその応用

研究課題名（英文）Geometry of log abelian varieties and its application

研究代表者

梶原 健（Kajiwara, Takeshi）

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：00250663

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、アーベル多様体のモジュライ空間において、適切な退化対象を対数幾何学のなかに見出し、対数アーベル多様体論を構築し、この方面の研究への応用を目指し、対数アーベル多様体の偏極に関する基礎研究、局所モジュライ空間、代数幾何形式幾何対応の研究を実施した。成果として、対数アーベル多様体上の乗法群に関わる主束の立方定理や、その多様体の射影モデルの存在が得られた。また、対数アーベル多様体の代数幾何形式幾何対応も得られ、このような多様体の局所モジュライ空間を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対数アーベル多様体は、アーベル多様体の退化と考えられる多様体では、群構造と完備性という、代数幾何における扱いやすい条件が両立しない点を補う、新しい空間であり、対数代数空間の例である。アーベル多様体の幾何を対数アーベル多様体へ拡張することで、退化アーベル多様体のさまざまな様相が統一的にとらえられる。本研究では、代数幾何の基本的な不変量や射影性の概念を定式化し、また、代数幾何と形式幾何との対応を確立した。これにより、本理論の基礎づけ、応用に貢献している。

研究成果の概要（英文）：We study moduli space of abelian varieties, and our purpose is to find suitable degenerating objects in logarithmic geometry. In our research, we have studied foundation on polarizations of logarithmic abelian varieties, and also local moduli spaces of them and GAGF. We show cubic theorem on torsors with relevant multiplicative groups on logarithmic abelian varieties, and existence of projective models of them.

研究分野：代数学

キーワード：対数構造 退化多様体 アーベル多様体

様式 C-19、F-19-1、Z-19（共通）

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の研究背景は以下のとおりである。

対数アーベル多様体論について、複素解析的な場合は対数ホッジ理論の観点から基礎づけができていた（文献4）。代数的な理論については、理論的定式化を発表した（文献3）。さらに本理論の応用例として、対数楕円曲線に対するモジュライ空間を構成し、対数楕円曲線の有限表示性に関する成果が得られていた（文献2）。

本アプローチの利点は、レベルが異なる間の底変換において、普遍族が変わらないことが挙げられる。例えば、従来の方法では、退化した楕円曲線はレベル構造によって既約成分の個数が異なっていた。

対数アーベル多様体を、代数多様体を利用して調べる方法として代数対数空間のモデルを利用する方法がある。本研究開始前に、研究成果として、大域的な解析において有用な完備なモデルを構成していた（文献1）。ひきつづき、この理論の完成に向けて、対数アーベル多様体上の豊富な直線束、射影モデルの研究が必要であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、Fontaine-Illusie-加藤の意味の対数構造を用いた、対数アーベル多様体の基礎理論を確立し、その応用として、対数アーベル多様体のモジュライ空間を構成することである。対数アーベル多様体により、アーベル多様体の標準的な退化が得られることが期待され、この退化を利用して、モジュライ空間のコンパクト化や従来理論の拡張、および、退化を利用した簡易化が期待される。

3. 研究の方法

研究方法としては、従来、退化アーベル多様体やモジュライ空間を解析する際に利用されているマンフォードの構成を、対数アーベル多様体に拡張し、その成果をさらなる研究に応用する。

対数アーベル多様体は、対数代数空間というよい空間であるが、従来代数多様体そのものではない。そのため、従来の手法を活用しつつ、研究方法を工夫しなければならない。

1つの方法として、対数アーベル多様体のモデルという、対数アーベル多様体を、いわば近似、生成するようなよい代数多様体を利用する。これについては、すでに本研究テーマのもとで研究成果がある。モデルとしては完備代数多様体となるモデルを利用する。完備モデルの存在も先行研究で得られている。

また、対数アーベル多様体のなかでも、対数1モチーフから定まるものは、大域的にアーベル多様体の代数的トラスによる拡大から定まる簡明な構造を持つ。この多様体へ帰着するため、有限表示性が重要であり、この性質により極限への移行、帰着を用いる。

対数アーベル多様体の偏極を研究するにあたり、偏極の定式化としては双拡大を採用する、この多様体上では、対数的乗法群や乗法群、前者の后者による商が重要な対象であるが、これらには双拡大に関する一般論が利用するとともに、立方構造など、この群を構造群とする主束へ拡張する。拡張に際し、この商から自然に定まる拡大や、それに伴うコホモロジー的な手法を用いる。

4. 研究成果

対数アーベル多様体の基礎として、乗法群を構造群とする、対数アーベル多様体上の主束の立方構造を確立した。これには、対数アーベル多様体に関するさまざまな有限表示性を必要としているため、併せて研究し、有限表示性についても成果が得られた。

対数アーベル多様体に関して、従来知られていたマンフォードの構成を拡張した。この構成に、対数アーベル上のテータ関数を定式化し、この関数から定まる自然な主束や形式モデルの代数化において用いた。この成果により、従来のアーベル多様体の射影性を拡張して、対数アーベル多様体の射影性について研究成果を得た。つまり、対数アーベル多様体上の偏極から、対数アーベル多様体の射影モデル（射影多様体となるようなモデル）を構成した。

対数アーベル多様体を、対数1モチーフと比較して議論する際、対数アーベル多様体の有限表示性が問題となる。有限表示性を、クンマーエタール表示と呼ばれる、半アーベル多様体とその主束や対数アーベル頼体の許容対合などから定まる対象を定式化し、これを用いて、成果が得られた。ここでは、対数幾何におけるクンマーエタール位相を利用した点がポイントである。この表示を応用して、対数アーベル多様体の代数幾何形式幾何対応が得られた。

モジュライ空間について、対数アーベル多様体の局所モジュライ空間を構成した。さらに大域モジュライ空間の研究を進めた。本研究は代数空間の表現に関するアルチンの判定法を用いて進めるため、おもに対数アーベル多様体の変形理論を研究した。変形理論に関連して対数アーベル多様体の微分加群、およびその拡大やコホモロジー群の計算を進めることができた。

参考文献

1. “Logarithmic abelian varieties, Part IV: Proper models”, Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, Chikara Nakayama, Nagoya Math. J. Vol. 219, 9-63, 2015.
2. “Logarithmic abelian varieties, III: Logarithmic elliptic curves and modular curves”, Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, Chikara Nakayama, Nagoya Math. J. Vol. 210, 59-81, 2013.
3. “Logarithmic Abelian varieties,” Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, and Chikara Nakayama, Nagoya Math. J., Vol. 189, 63-138, 2008.
4. “Logarithmic Abelian varieties, Part I: complex analytic theory,” Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, and Chikara Nakayama, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 15, 69-193, 2008.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, Chikara Nakayama	4. 巻 64
2. 論文標題 Logarithmic abelian varieties, part V: projective models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Yokohama Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 21-82
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, Chikara Nakayama	4. 巻 65
2. 論文標題 Logarithmic abelian varieties, part VI: local moduli and GAGF	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Yokohama Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 53-75
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----