

令和元年5月30日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04812

研究課題名（和文）完全交叉のレフシェッツ性問題に関する研究

研究課題名（英文）On the Lefschetz property of complete intersections

研究代表者

張間 忠人（Harima, Tadahito）

新潟大学・人文社会科学系・教授

研究者番号：30258313

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：完全交叉のレフシェッツ性について研究した。主な研究成果は次のとおりである。  
1. 対称群の作用をもつ2次式完全交叉は、強いレフシェッツ性をもつ。2. EGH予想が正しい完全交叉のクラスでは、その完全交叉はSperner性をもつ。3. 十分一般的な1次式の積で定義される完全交叉は、強いレフシェッツ性をもつ。4. 2次式完全交叉のマコーレイ双対の特徴付けを与えた。5. 3変数のべき和対称式からなる正則列に関する知られた結果の別証明を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

完全交叉のレフシェッツ性に関する研究は、コンピュータサイエンスとも関連のある多項式環論の基礎研究の一つである。また、レフシェッツ性は、線形写像の最強のジョルダン分解を求める問題とも関連しており、今後、線形写像のレフシェッツ性は、代数学の基本的な事項として位置付けられるのではないだろうか。

研究成果の概要（英文）： We studied the Lefschetz property of complete intersections. Main results of this research are the followings: 1. Any quadratic complete intersection with certain action of the symmetric group has the strong Lefschetz property. 2. Suppose that the EGH Conjecture is true for a complete intersection  $A$ . Then  $A$  has the Sperner property. 3. All complete intersections defined by products of general linear forms have the strong Lefschetz property. 4. We gave a characterization of the Macaulay dual generators for quadratic complete intersections. 5. We gave another proof of some known results on power sum symmetric polynomials in three variables.

研究分野：可換環論

キーワード：可換環 完全交叉環 アルティン環 ゴレンスタイン環 レフシェッツ性 対称式

## 1. 研究開始当初の背景

ゴレンスタイン環のレフシェッツ性は、1980年代に定義された。その頃から、「標数ゼロの体上の完全交叉は、強いレフシェッツ性をもつ」ことが予想されていたが、進展が見られなかった。ところが、2003年に、3変数の完全交叉は弱いレフシェッツ性をもつことが示された後、どんな環がレフシェッツ性をもつか?といった問いに興味をもつ研究者も増え、同時に、様々な分野との関連も明らかになってきた。

この予想の肯定的な解決に向けて、これまでの共同研究では、平坦拡大定理や中心単純加群の理論の構築ができた。それらの結果を受けて、さらに、レフシェッツ性をもつ完全交叉の新しいクラスを見つけることが期待された。

## 2. 研究の目的

研究の最終目標は、予想「標数ゼロの体上の完全交叉は、強いレフシェッツ性をもつ」を肯定的に解決することである。

本研究では、対称群の作用をもつゴレンスタイン環、一次式の積で定義される完全交叉環等を研究対象として、そのレフシェッツ性について考察した。同時に、 $n$ 変数2次式のMacaulay双対で定義されるゴレンスタイン環はいつ完全交叉であるか?といった問いについても考察することとした。

また、完全交叉のレフシェッツ性問題は、アルティン環の一般元の振る舞いに関する問いとしてとらえることができる。これに関連して、次数付き加群の  $m$ -full 性について考察を進めることとした。

## 3. 研究の方法

平坦拡大定理、中心単純加群の理論を用いた手法を再検討しつつ、対称群の作用をもつゴレンスタイン環のレフシェッツ性、一次式の積で定義される完全交叉環のレフシェッツ性、 $n$ 変数2次式のMacaulay双対で定義されるゴレンスタイン環の完全交叉性に関する問題は、研究分担者の和地輝仁氏と研究協力者の渡辺純三氏の協力の下で研究を進めた。

イデアルの  $m$ -full 性等の結果を踏まえつつ、次数付き加群の  $m$ -full 性、同時に、3変数の巾和対称式からなる正則列に関する問は、研究分担者の五十川諒氏の協力の下で研究を進めた。

## 4. 研究成果

(1) 標数ゼロの体上で十分一般的な1次式の積で定義される完全交叉環は、強いレフシェッツ性をもつことを示した。証明では、central simple module による強いレフシェッツ性の特徴付け定理を用いた。また、1次式の積で定義される完全交叉環に関する Martina Juhnke-Kubitzke, Rosa M. Miró-Roig, Satoshi Murai, Akihito Wachi の定理の別証明を与え、その結果を拡張した。

(2) 2次の二項式で生成される完全交叉の終結式を計算し、その完全交叉が square-free な単項式を基底に持つための必要十分条件を求めた。

(3) 3変数多項式環の「巾和対称多項式の成す正則列」に関するコンカ、クラッテンザラー、渡辺の予想が成り立ついくつかのケースを、先行研究とは異なる手法を用いて証明した。この中には、先行研究では知られていない、(予想が成り立つ)新たなケースも含まれている。具体的には、巾和対称多項式の次数の集合を  $A$  としたとき、 $A$  が1および2以上7以下の素数の巾か10を含む場合は、予想が成り立つことを示した。証明には、終結式の適当な素数によるリダクションを用いている。

(4) 標数ゼロの体上の多項式環を斉次完全交叉イデアルで割って得られるアルティン剰余環は強いレフシェッツ性を持つという予想があるが、論文では1次式の積で生成される完全交叉イデアルの場合に注目した。特に、イデアルの生成元が、変数の冪と1次の二項式との積である場合、そのイデアルが完全交叉であれば常に剰余環が強いレフシェッツ性を持つことを示した。証明にあたっては、問題のイデアルを変数変換することで特定の形に変形できることを示し、その形のイデアルのグレブナ基底を求めることで強いレフシェッツ性を示した。

(5) 次数付き加群の斉次部分加群の性質として Strongly  $m$ -fullness (以下 強  $m$ -充満性と記す) を定義し、斉次部分加群が強  $m$ -充満性を持つかどうかの判定法を、斉次部分加群の強  $m$ -充満閉包を飽和部分加群たちを用いて表すことにより与えた。特に、斉次部分加群が成分  $m$ -充満性を

持てば、強  $m$ -充満性を持ち、強  $m$ -充満性を持てば、 $m$ -充満性を持つが、証明には、 $m$  進  $m$ -充満性という概念を定義し、これが成分  $m$ -充満性と同値であることを用いた。応用として、2 変数多項式環のイデアルが  $m$ -充満性を持つかどうかの判定法を得た。これは、渡辺氏の与えた  $m$ -primary イデアルの場合の判定法の拡張となっている。

(6) 体上の標準的度数付ネーター可換代数やネーター局所環のイデアルに関して  $m$ -fullness(以下  $m$ -充満性と記す)という性質がある。 $m$ -充満性は自然に、度数付加群の斉次部分加群の性質として拡張できる。論文 では、度数付加群の斉次部分加群の性質として Componentwise  $m$ -fullness(以下 成分  $m$ -充満性と記す)を定義し、斉次部分加群が成分  $m$ -充満性を持つかどうかの判定法を、ある不変量を導入することにより与えた。特に、斉次部分加群が成分  $m$ -充満性を持てば、 $m$ -充満性を持つ。その判定法を用いて、度数付加群の深度が 1 以上あれば、その斉次部分加群は極大イデアルの十分高い巾をかけることにより成分  $m$ -充満性(特に、 $m$ -充満性)を持つことを示した。

(7) Macaulay の双対原理は、(度数付き) 0 次元ゴレンスタイン環と(斉次)多項式の間の一対一対応が存在することを主張する。完全交叉環に対応する斉次多項式を特徴付けることは、自然な問題であるのだが、長い間、「この問題には良い解決が存在しない」と思われていた様だ。「この問題は考えない方が良い」など主張する専門家がいた。論文 では初めて、 $n$  変数 2 次式に限れば、簡単な特徴付けが得られることを示した。さらに、その拡張として、一般の完全交叉環に対応する Macaulay 双対の特徴付けが得られることも示唆した。これによって、Macaulay 双対原理の研究、とりわけ、完全交叉環の強いレフシェッツ性問題の研究が前進すると期待できる。

(8) ブール束の Sperner 性には、多くの証明が知られている。Sierpinski 行列はフラクタル構造を持つ  $2^n$  次行列である。この行列のジョルダン標準形を決定できればブール束の Sperner 性の新しい証明が得られる。論文 では、O'Meara-Vindensohn-Clark らによる研究成果をもとに、ワイア標準形を決定した。ワイア標準形はジョルダン標準形に相似である。その結果として、2 次式単項式完全交叉環の強いレフシェッツ性(Sperner 性を含む)の新証明が得られた。また、部分環定理により、一般次数の単項式完全交叉環の強いレフシェッツ性の新証明が得られた。これは、一般の完全交叉が 2 次式完全交叉の部分環にとして現れることを示唆しており、興味深い。

(9) アルティンゴレンスタイン環において matching 性を導入し、Eisenbud-Green-Harris 予想と Sperner 性との関連性について考察した。主要な結果は次の通りである: 1. アルティンゴレンスタイン環が matching 性をもてば、Sperner 性をもつ。2. 単項式で生成される完全交叉は、matching 性をもつ。3. EGH 予想が成り立つ完全交叉は、matching 性をもつ。ゆえに、Sperner 性をもつ。4. 1 次式の積で生成される完全交叉は、matching 性をもつ。ゆえに、Sperner 性をもつ。

(10) 標数ゼロの体上の多項式環を斉次完全交叉イデアルで割って得られるアルティン剰余環は強いレフシェッツ性を持つという予想があるが、論文 では、生成元  $f_1, f_2, \dots, f_n$  が 2 次式であり、この生成元が  $n$  次対称群の作用で変数の置換と同じ置換を受けるような完全交叉イデアルによる剰余環は常に強いレフシェッツ性を持つことを証明した。また、剰余環において、 $n$  個の変数の和を  $e_1$  としたとき、 $e_1$  の 2 乗がゼロではないとき、 $e_1$  がレフシェッツ元となることも示した。さらに、この剰余環の、対称群のヤング部分群による不変式部分環についても議論し、イデアルの生成元が十分一般的である場合には、不変式部分環は 1 次の元で生成され、強いレフシェッツ性を持つことを示した。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 10 件)

[Tadahito Harima](#), [Akihito Wachi](#), [Junzo Watanabe](#), The strong Lefschetz property for complete intersections defined by products of linear forms, to appear in Archiv der Mathematik, 査読有

[Tadahito Harima](#), [Akihito Wachi](#), [Junzo Watanabe](#), The Resultants of Quadratic Binomial Complete Intersections, to appear in Journal of Commutative Algebra, 査読有

[Satoru Isogawa](#), [Tadahito Harima](#), Regular sequences of power sums in the polynomial ring in three variables, Research Reports of National Institute of Technology (Kumamoto College), Vol. 10 (2018) 60-66

Martina Juhnke-Kubitzke, Rosa M. Miró-Roig, Satoshi Murai, Akihito Wachi, Lefschetz properties for complete intersection ideals generated by products of linear forms, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, Vol. 146 (2018) 3249-3256

Satoru Isogawa, Strongly  $m$ -full modules, Research Reports of NIT, Kumamoto College Vol.9 (2017) 100-108

Satoru Isogawa, Componentwise  $m$ -full modules, Research Reports of NIT, Kumamoto College Vol.9 (2017) 91-99

Tadahito Harima, Akihito Wachi, Junzo Watanabe, A characterization of the Macaulay dual generators for quadratic complete intersections, Illinois Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 61 (2017) 371-383

Kevin O'Meara, Junzo Watanabe, Weyr structure of matrices and relevance to commutative finite-dimensional algebras, Linear algebras and its applications, 査読有, Vol. 532 (2017) 364-386

Tadahito Harima, Akihito Wachi, Junzo Watanabe, The EGH conjecture and the Sperner property of complete intersections, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, Vol. 145 (2017) 1497-1503

Tadahito Harima, Akihito Wachi, Junzo Watanabe, The quadratic complete intersections associated with the action of the symmetric group, Illinois Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 59 (2015) 99-113.

[学会発表](計 10 件)

渡辺純三, Linear subspace arrangements, principal radical systems and the Specht ideals, 第 40 回可換環論シンポジウム(レクトーレ葉山), 2018 年 11 月 22 日

五十川 読, 張間 忠人, Regular sequence of power sums, 第 139 回日本数学会九州支部例会(大分大学), 2018 年 10 月 20 日

張間 忠人, 和地 輝仁, 渡辺 純三, 一次式の積で定義される完全交叉の強いレフシェッツ性について, 日本数学会 2018 年度秋期総合分科会(岡山大学), 2018 年 9 月 24 日

渡辺純三, 次数付き 0 次元ゴレンスタイン環のレフシェッツ性について, 日本数学会春期総合分科会(東京大学), 企画特別講演(招待講演), 2018 年 3 月 20 日

渡辺純三, The resultants of quadratic binomials, 第 39 回可換環論シンポジウム(京都数理解析研究所), 2017 年 11 月 14 日

五十川 読, Componentwise  $m$ -full modules over a standard graded algebra, 第 137 回日本数学会九州支部例会(熊本大学), 2017 年 10 月 4 日

Akihito Wachi, A characterization of the Macaulay dual generators for quadratic complete intersections, Workshop on Lefschetz Properties in Algebra, Geometry and Combinatorics, Mittag-Leffler Institute (Sweden) (国際学会) 2017 年 7 月 13 日

Junzo Watanabe, The Weyr form seems a better tool for Artinian algebras than the Jordan form, Workshop on Lefschetz Properties in Algebra, Geometry and Combinatorics, Mittag-Leffler Institute (Sweden) (国際学会), 2017 年 7 月 12 日

張間忠人, 和地輝仁, 渡辺純三, 対称群が作用する 0 次元完全交叉環の強いレフシェッツ性, 日本数学会秋季総合分科会(関西大学), 2016 年 9 月 16 日

張間忠人, 和地輝仁, 渡辺純三, The EGH conjecture and the Sperner property of complete intersections, 日本数学会秋季総合分科会(関西大学), 2016 年 9 月 16 日

[その他]

ホームページ等  
新潟大学 研究者総覧  
[http://researchers.adm.niigata-u.ac.jp/html/100000788\\_ja.html](http://researchers.adm.niigata-u.ac.jp/html/100000788_ja.html)

## 6 . 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：和地 輝仁  
ローマ字氏名：(WACHI akihito)  
所属研究機関名：北海道教育大学  
部局名：教育学部  
職名：准教授  
研究者番号(8桁)：30337018

研究分担者氏名：五十川 読  
ローマ字氏名：(ISOGAWA satoru)  
所属研究機関名：熊本高等専門学校  
部局名：共通教育科  
職名：教授  
研究者番号(8桁)：80223056

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：渡辺純三  
ローマ字氏名：Watanabe Junzo

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。