

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2022

課題番号：15K04816

研究課題名(和文) ホッジ加群の基礎及び応用研究の総仕上げ

研究課題名(英文) Completion of the foundation and applications of Hodge modules

研究代表者

斉藤 盛彦 (Saito, Morihiko)

京都大学・数理解析研究所・研究員

研究者番号：10186968

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：ホッジ加群の理論を、特異点論、ヒルツェブルフ特性類論、超平面配置理論、対数微分形式理論、ホッジ・イデアル理論などといった代数幾何学の諸分野に応用する事により数多くの新しい結果を得た。例えば特異多様体上の微分形式や特異点の還元などを使って定義される高次デュボワまたは有理特異点とD-加群における関数等式を使って定義される被約ベルンシュタイン佐藤多項式の最大根との関係等はホッジ加群の理論無しには到底証明できないものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

最近の数学の学術誌には結果自体は一見相当に派手で興味深いものではあるが、その証明を地道に理解するのはかなり困難な論文が増えており、ホッジ加群に関する論文でもそういう傾向がやや見られないわけではないが、そうした中でも出来るだけ読者が理解しやすいような、また誤解を生まないような論文を書くことに努めた。これが最終的には数学の発展にとって最も貢献できるやり方であると思われるが、どこまで達成されたかについては何とも言えない所がある。

研究成果の概要(英文)：We obtained many new results in various fields of algebraic geometry such as singularities, Hirzebruch characteristic classes, hyperplane arrangements, logarithmic differential forms, Hodge ideals, and so on, applying the theory of mixed Hodge modules. For instance, without using Hodge modules, it is completely impossible to prove the relation between higher du Bois or rational singularities, which are defined by using differential forms on singular varieties and resolutions of singularities, and the maximal root of the reduced Bernstein-Sato polynomial, which is defined by using functional equations in D-modules.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ベルンシュタイン佐藤多項式 ヒルツェブルフ特性類 高次デュボワ特異点 ホッジ・イデアル 対数微分形式 超平面配置 ホッジ加群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

最近の学生や若い数学者の基礎学力の低下というのは日本だけにとどまらず全世界的な傾向が見られ、数多くの致命的な誤りを含む論文が一流学術紙を賑わせているという話もよく耳にするようになってきた。この原因としては学術紙の側にも全く責任の一旦がないとはいえず、見かけ上の面白さだけで掲載の可否を判断し、間違いのあった場合は著者のみに責任を負わせるのではなく、以前のように証明も或る程度丁寧に調べる事が重要ではないかと言われている。更に最近は誤りがあっても訂正をだすという習慣がなくなったようなので、一体どれが間違いでどれが正しいのか初心者には全くわからないという事態になっていることも十分考えられる。例えば比較的最近得られたホッジ理論の大定理を使わなければ到底証明出来ないような代数多様体論の結果をその大定理が考えられる以前に一流紙から出版した例などがある。局所不変サイクル定理の証明の欠陥を指摘した論文の修正議論にまた重大な勘違いがあると言うのは余り知られていない様である。執筆をかなりせかされた共著者の一人が never-ending diagram chase などと冗談のつもりで書いた、証明のまるでなっていない原稿がそのまま一流誌から出版され、かなり大変な事態と呼ばれるべき事になっているというの聞いたことがあるが訂正の類は全く出されていない様である。それから偏極ホッジ構造の変動の局所系の半単純性やインシグニフィカント退化の際の基本定理の証明というのが実はかなり理解不能であり引用されてはいいないという話もあるが一切訂正は出ていない様である。双対関手に関する符号の問題は完全に解決されたとは未だに言い難いし、超曲面孤立特異点のスペクトルの最初の定義がどこかうまくいってなかったのはモノドロミーの向きに問題があったせいであるということが公になったのは発表から30年以上たってからである。数学の基本的理論が正確に継承されていない可能性も十分考えられ、例えば代数体上定義された多様体の絶対既約性に関するヴェイユや志村谷山の体の正則拡大の理論が元来体論というものを極力使わないスキーム理論ではうまく取り扱われていないのではないかという話も随分昔に聞いた覚えがある。

そこで手軽で面白いだけではなく、出来るだけ確実に信頼できる数学というものを若い世代に残す事が重要ではないかと考えられている。またホッジ加群の基本理論については、その再整備を行う事により更に若い人達に受け入れられ易くする事も重要ではないかと思われる。

### 2. 研究の目的

例えば非特異代数多様体の定数層の射影的写像による順像の分解定理の証明を見てもわかるように、ホッジ加群を使うと使わないのでは、できる事に多少とも差が表れて来るものである。そこで内外の研究者たちとの討論を通じてホッジ加群の理論の代数幾何における新たな応用を発見し、また間違った使い方を訂正するとともに、ホッジ加群の基礎理論の更なる簡明化を通してホッジ加群の普及を目指すことにあった。

### 3. 研究の方法

内外の共同研究者たちとの討論を通じて、現在かなり興味をもたれている問題で、かつホッジ加群の理論を有効に使えるようなものを探る事が肝心となる。更にこの問題に対して、ホッジ加群の理論をどの様に適用させることが出来るかも鍵になる。具体的には様々な研究集会に参加して、個人的に議論を重ねる事によりアイデアが得られる事も多い。それから最近は具体例を計算するにはコンピュータは欠かせない道具となっている。

### 4. 研究成果

(1) ベルンシュタイン佐藤多項式に関連した研究として、正則関数の有理数幂で生成された D-加群とベルンシュタイン佐藤多項式の根との関係について、ベルンシュタイン佐藤多項式の根が必ずしも常に上記の D-加群の変化に寄与するわけではないという多少とも意外な結果を得た。その副産物として、超曲面孤立特異点のブリースコロン加群の飽和化におけるガウス・マニン接続の留数として定義される行列は超曲面特異点のモノドロミー行列とは相似ではないという30年来の未解決の問題の否定的な答えを得る事も出来た。この反例の構成にはかなり精密なガウス・マニン接続の計算が必要となり、30年間できなかったことも納得できる (arxiv:1507.01877)。

(2) スペクトル・ヒルツェブルフ・ミルナー類という新しい特性類を導入し、この類に対するトム・セバスチャニ型の定理を確立した。この特性類は超曲面孤立特異点の場合にはステンブリンク・スペクトルと本質的に一致し、そのバウム、フルトン、マックファーソンらによるトッド類変換を使った大域の一般化になっている。この一般化が必要な理由というのは、トム・セバスチャニ型の定理においてはホッジ・フィルトレーションのずれが各成分のモノドロミー固有値に依存するという状況から来る。次に超局所乗数イデアルに対するトム・セバスチャニ型の定理を定式化し、それが定数係数のホッジ加群の消滅輪体に対するトム・セバスチャニ型の定理から従う事も示した (arxiv:1606.02218, 1610.07295)。

(3) 特異点が全て重み付き斉次孤立特異点であるような射影超曲面の定義関数のベルンシュタイン佐藤多項式を計算するために、極位数スペクトル系列の E2-退化をこの場合に証明した。これでベルンシュタイン佐藤多項式の計算がこの場合は特殊な場合を除いてヤコビ代数のヒルベルト数列の計算に帰着される事となったが、この特殊な場合についてはまだ分かっていない事も多いので、更に研究を進めなければならない。次に一般超平面切断の特異点が全て重み付き斉次孤立特異点であるような射影超曲面の定義多項式についても極位数スペクトル系列の研究を行い、極位数スペクトルの計算機を使った決定が原理的には可能である事を示した。この場合には E1 項が既に相当複雑な格好なので、その記述には或る程度の可換代数の道具立てが必要となる (arxiv:1609.04801, 1703.05741, 1902.03838)。

(4) ムスタタとポッパによって導入されたホッジ・イデアルが超局所乗数イデアル、即ち超局所 V-フィルトレーションと与えられた超曲面の定義イデアルを法として一致する事を整係数の場合に証明した。これはムスタタとポッパによってホッジ・イデアルの定義と共に有理係数の場合に拡張された。それからホッジ・イデアル・スペクトルというのを導入して、孤立超曲面特異点の場合にホッジ・イデアルと超局所 V-フィルトレーションとがヤコビ・イデアルを法としても違っている為の十分条件などを調べた (arxiv:1904.02453)。

(5) ライヒェルトとヴァルターの質問に答えているうちに、射影多様体の錐の Lyubeznik 数というのが射影多様体の射影空間への埋入の仕方に依るといふ、多少とも以外な定理を得た。またブドゥールの質問に答えて、特異代数多様体の次数 1 のコホモロジー群のウェイト 0 部分というのは、代数多様体の位相不変量であるという定理を証明し、その具体的記述法についても研究した (arxiv:1803.07448, 1804.03632)。

(6) ケール、ラーザの両氏との共同研究では、非特異多様体が有理特異点しか持たない多様体に退化した場合には境界ホッジ数が不変であり、更にモノドロミーの冪零指数は通常の場合よりも 2 だけ良いという事を証明した。これは多様体のモジュライ空間のコンパクト化の理論においてかなり有用ではないかと思われる。証明には混合ホッジ加群の消滅輪体上のモノドロミー・フィルトレーションの理論が本質的に使われる (arxiv:1906.03917)。

(7) 孤立特異点を持った 3 変数のニュートン非退化関数のスペクトラムの比較的簡単な表示方法を発見した。これはステンプリングの公式を使うよりも遥かに簡単に計算出来る。これに昔ホッジ加群を使って証明したヨムディンの公式の精密化に関するステンプリング予想とを組み合わせることにより、特異点が 1 次元の場合の 3 変数ニュートン非退化関数のスペクトラムを計算する公式を得た (arxiv:1911.09465)。

(8) ニュートン非退化関数に関しては、消滅輪体をニュートン多面体を使って表示する公式の正確な証明を得た。この公式は専門家の間ではかなり知られたものの様ではあるが、証明は以外と簡単ではなくかなりの技術的困難さを伴う。これを使うことにより、孤立特異点を持ったニュートン非退化関数のモノドロミーのジョルダン・ブロックに関する比較的良く知られた公式をトロピカル幾何を使わずに証明することができる。またここでの論法を使うことにより、デーネフ・ロゼールのモチーフ的ミルナー・ファイバーをニュートン多面体を使って表わす公式も証明することができた (arxiv:2004.12367)。

(9) ニュートン非退化超曲面の交叉複体については様々な類似した公式が知られていたが、それらは全て実質的に同値であることを確かめ、更にホッジ加群の圏に於ける公式をトム・ギシン系列を使う事により証明した。この公式はパチレフ氏の論文などにも本質的に使われているようではあるが、正確な証明はどこにも書かれていなかったようである。また上記の論法は 1-進係数の場合にも不可欠であるように思われるが、文献に於ける記述はこれに関してあまり正確ではないようである (arxiv:2006.04081)。

(10) フェルナンデス・パラレス両氏との共同研究においては、ホッジ加群の偏極を使うことにより、ホッジ加群のグロタンディック群から実係数自己双対複体のコボルディスム類群への自然な写像を構成し、その結果として多様体のグロタンディック群から上記のコボルディスム類群への自然な写像も得ることができた。これによりプラスレ・シュルマン・與倉氏らによる有理ホモロジー多様体のゴレスキー・マックファーソン交叉複体 L-類に関する予想について、理論的に自然な証明を与えることができた。ここではコボルディスム類群の定義に普通使われる双対関手の符号の問題が実は未解決であることに気づいたので、ドリーニュの提案に従って双対関手を使わない定義を採用した (arxiv:2103.04836)。

- (11) 斉次 3 変数超平面配置のミルナー束コホモロジーの計算に関しては、エノー・シェヒトマン・フィーヴェックの方法で計算可能な為の比較的簡単な十分条件を考察し、超平面配置の効率性や複雑性を表す指標を定義した。これらの指標がある程度小さければ彼らの方法で計算可能なのではあるが、例外の場合がかなりあり、簡明で有用な公式を得るのはそう簡単ではない。また斉次 4 変数以上の場合には原点を通らない超平面切断を繰り返すことにより、ミルナー束の一次コホモロジーの非冪単モノドロミー部分が 0 でないことは滅多に起こらないことを示した (arxiv:2103.13734, 2008.10529)。
- (12) 高次デュボワ特異点に関してムスタタやポッパラによって得られた結果の大幅な精密化を行った。例えば彼らは超曲面の場合に高次対数標準特異点は高次デュボワであることは証明していたが、その逆は全く予想もしていなかった。また、被約ベルンシュタイン佐藤多項式の最大根を用いた高次デュボワ複体の性質の記述に関して彼らの結果を格段に精密化した。それから超曲面の高次有理特異点が被約ベルンシュタイン佐藤多項式の最大根で決まることも証明した (arxiv:2107.06619)。
- (13) 複素解析関数の何乗がそのヤコビ・イデアルに入るかというブリアンソン・スコダ指数が被約ベルンシュタイン佐藤多項式の最大根を用いて評価されることをホッジ加群の理論を使って証明した。これは超曲面上にある全ての孤立特異点のミルナー数の和を計算機を使って計算する場合にはかなり役に立つものと思われる。孤立特異点の場合には、実はこれは約 40 年前のヴァルチェンコの結果から簡単に導かれるのであるが、彼も含めてこの 40 年間誰もこの評価に気がついていなかったのはいささか意外ではあった (arxiv:2108.07231)。
- (14) 偏極ホッジ加群に対する局所及び大域不変サイクル定理がホッジ加群の一般論から従うことが余り知られていない様なので論文に書いた。これらの定理をホッジ加群の理論を使わずに証明したと称している論文では、ホッジ・フィルトレーションと  $t$ -構造に関する革命的な定理を証明なしで使用している様である (arxiv:2201.01587)。
- (15) 超平面配置の対数微分形式の複体が有理微分形式の複体と導来圏においていつ同型であるかという謂わゆる比較定理が、マンフォード・カステルヌオボの正則量の評価とそれに付随した高次コホモロジー群の消滅を使うこと等により、パース氏の証明よりも遥かに簡単に証明されることを示した。ここではそれらの複体に対応した  $D$ -加群の複体の同型を証明することにより、同型であるための条件も超平面配置の密な縁だけに制限することが可能となった。また上記の論法を拡張して、超曲面が重み付き斉次多項式で定義されている場合には対数微分形式がブリースコルン加群を使って表せられる事等を示した後、比較定理の成立が超曲面のベルンシュタイン佐藤多項式の  $-1$  以外の整数根の有無と密接に関連している事等を証明した (arxiv:2203.11716)。
- (16) 固有ケーラー写像の場合の導来圏における定数層の順像の分解定理の証明について、30 年以上前の論文の中でかなり不正確な部分が発見されたので、その修正に関する研究を行なった。ここではホッジ加群の偏極の符号というのが相当厄介な問題となる。この定数層の場合の論法を一般の場合に拡張することもずいぶん考えたのではあるが、結局完全に何か新しいアイデアが必要という結論に落ち着いた (arxiv:2204.09026)。
- (17) 超曲面の高次有理及び高次デュボワ特異点をヒルツェブルフ・ミルナー特性類を使って特徴付けるマキシム・ヤンの論法について、それが射影超曲面の場合には殆ど適用出来ない事を発見したので、その修正を行なった。ここでヒルツェブルフ・ミルナー特性類というのは元々超曲面の大域的な定義関数に沿ってのホッジ加群の消滅輪体を使って定義されていたのだが、大域的定義関数が全く不要な枠組みを導入した。これは応用上非常に有益な改善であると思われる (arxiv:2302.00970, 2303.04724)。
- (18) 非特異代数多様体の閉埋入による混合ホッジ加群の引戻しはコスズル複体を使って表せられるというチェン・ダークスの主張について、混合ホッジ加群のヴェルディエ特殊化をうまく使えば帰納的議論に簡単に載せられることを示し、彼らの論法をかなり簡略化することに成功した (arxiv:2304.13644)。
- (19) ホッジ加群の基礎理論の更なる簡易化については、まず確定特異点型  $D$ -加群についての説明から始めなければならないが、これが意外と簡単ではない事が分かってきたので証明を丁寧につけていくと相当な時間が費やされ、まだ完全にはできていない (arxiv:2201.01507)。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 0件）

|                                                                                                |                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Jung Seung-Jo, Kim In-Kyun, Saito Morihiko, Yoon Youngho                             | 4. 巻<br>28              |
| 2. 論文標題<br>Briancon-Skoda exponents and the maximal root of reduced Bernstein-Sato polynomials | 5. 発行年<br>2022年         |
| 3. 雑誌名<br>Selecta Mathematica                                                                  | 6. 最初と最後の頁<br>—         |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00029-022-00791-1                                         | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                                         | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>Kerr Matt, Laza Radu, Saito Morihiko                                                 | 4. 巻<br>9               |
| 2. 論文標題<br>Deformation of rational singularities and Hodge structure                           | 5. 発行年<br>2022年         |
| 3. 雑誌名<br>Algebraic Geometry                                                                   | 6. 最初と最後の頁<br>476 ~ 501 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.14231/AG-2022-014                                               | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                                         | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>Jung Seung Jo, Kim In Kyun, Saito Morihiko, Yoon Youngho                             | 4. 巻<br>125             |
| 2. 論文標題<br>Higher Du Bois singularities of hypersurfaces                                       | 5. 発行年<br>2022年         |
| 3. 雑誌名<br>Proceedings of the London Mathematical Society                                       | 6. 最初と最後の頁<br>543 ~ 567 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1112/plms.12464                                                 | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                                         | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>Jung Seung-Jo, Kim In-Kyun, Saito Morihiko, Yoon Youngho                             | 4. 巻<br>72              |
| 2. 論文標題<br>Hodge ideals and spectrum of isolated hypersurface singularities                    | 5. 発行年<br>2022年         |
| 3. 雑誌名<br>Annales de l'Institut Fourier                                                        | 6. 最初と最後の頁<br>465 ~ 510 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.5802/aif.3453                                                   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                                         | 国際共著<br>該当する            |

|                                                                            |                         |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Saito Morihiko                                                   | 4. 巻<br>57              |
| 2. 論文標題<br>D-Modules Generated by Rational Powers of Holomorphic Functions | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences | 6. 最初と最後の頁<br>867 ~ 891 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.4171/PRIMS/57-3-5                           | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                     | 国際共著<br>-               |

|                                                                                          |                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1. 著者名<br>Kerr Matt, Laza Radu, Saito Morihiko                                           | 4. 巻<br>27      |
| 2. 論文標題<br>Hodge theory of degenerations, (I): consequences of the decomposition theorem | 5. 発行年<br>2021年 |
| 3. 雑誌名<br>Selecta Mathematica                                                            | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00029-021-00675-w                                   | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                                   | 国際共著<br>該当する    |

|                                                                                                    |                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1. 著者名<br>Reichelt Thomas, Saito Morihiko, Walther Uli                                             | 4. 巻<br>27      |
| 2. 論文標題<br>Dependence of Lyubeznik numbers of cones of projective schemes on projective embeddings | 5. 発行年<br>2021年 |
| 3. 雑誌名<br>Selecta Mathematica                                                                      | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00029-020-00612-3                                             | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                                             | 国際共著<br>該当する    |

|                                                                                                                      |                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| 1. 著者名<br>Saito Morihiko                                                                                             | 4. 巻<br>16                |
| 2. 論文標題<br>Roots of Bernstein-Sato polynomials of certain homogeneous polynomials with two-dimensional singular loci | 5. 発行年<br>2020年           |
| 3. 雑誌名<br>Pure and Applied Mathematics Quarterly                                                                     | 6. 最初と最後の頁<br>1219 ~ 1280 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.4310/pamq.2020.v16.n4.a13                                                             | 査読の有無<br>有                |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                                                               | 国際共著<br>-                 |

|                                                                         |                         |
|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Maxim Laurentiu, Saito Morihiko, Schurmann Jorg               | 4. 巻<br>377             |
| 2. 論文標題<br>Spectral Hirzebruch-Milnor classes of singular hypersurfaces | 5. 発行年<br>2018年         |
| 3. 雑誌名<br>Mathematische Annalen                                         | 6. 最初と最後の頁<br>281 ~ 315 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00208-018-1750-4                   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                  | 国際共著<br>該当する            |

|                                                                                      |                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 1. 著者名<br>Maxim Laurentiu, Saito Morihiko, Schurmann Jorg                            | 4. 巻<br>2020           |
| 2. 論文標題<br>Thom-Sebastiani Theorems for Filtered D-Modules and for Multiplier Ideals | 5. 発行年<br>2018年        |
| 3. 雑誌名<br>International Mathematics Research Notices                                 | 6. 最初と最後の頁<br>91 ~ 111 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1093/imrn/rny032                                      | 査読の有無<br>有             |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                               | 国際共著<br>該当する           |

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|