様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４年　６月１４日現在

機関番号：１６１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2021
課題番号：１５K０４８２２

研究課題名（和文）代数曲線の自己同型群と射影モデル

研究課題名（英文）Projective models and automorphism groups on algebraic curves

研究代表者
大渕　朗（OHBUCHI, Akira）

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部（理工学域）・教授

研究者番号：１０２１１１１１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：代数曲線の自己同型群を射影モデルを用いて求めた。特に代数曲線族の中で自己同型群がどの様な挙動をとるか、あるいはワイアシュトラス点にどの様な影響があるか、またガロア点と言うワイアシュトラス点に類似した概念であるが、代数曲線を代数関数体と見たガロア理論と関係を見る時の良い判定基準になる特別な点の研究などに関して幾つかの結果を得た。
更に標数が正である体の上の代数曲線の自己同型群についても幾つか計算を行い、特にMitchelなどの群のモジュラー表現を幾何学的に扱う考え方を基に、代数曲線を取り扱う事も行っているがこれについては幾つか課題も残っている。

研究成果の学術的意義や社会的意義
代数曲線とその自己同型群は純粋に数学の問題であるが、射影モデルは代数曲線を方程式で定義される対象であると見なす考え方で、方程式が扱われる場、例えば暗号の構成とかディープラーニングなど様々な場との関係が深い。そのため、問題意識は数学に特化した研究であっても、方程式系を扱う事で何らかの応用を求める場合に対する重要な基礎研究と位置付けられるものである。この種の一番有名な応用例はゴレイ符号と言うエラーに対して強い通信の構成理論で、これはMathieu群と言う非常に特別な群の存在により保証されるものである。この様な特殊な群と代数曲線＝方程式系の関係を提示するのは社会的にも意義深いと考える。

研究成果の概要（英文）：We calculate automorphism groups of algebraic curves in terms of projective models and finally we have several results on automorphism groups on algebraic curves. For example, we obtain some results on the behavior of the automorphism groups of an analytic family of algebraic curves, on its effects to Weierstrass points, and on Galois points which is a similar concept to Weierstrass points, but is considered as a good criterion for looking the relationship between algebraic curves and Galois theory because we can regard algebraic curves as algebraic function field.
We can calculate several results on these areas. Moreover, we calculate automorphism groups of algebraic curves defined on a positive characteristic field, and in particular, we have severl calculations based on the geometric treatment of modular representations of groups which is mainly by Mitchel, but there are still many questions so unfortunately have to say not so enough.

研究分野：代数曲線論

キーワード：自己同型群　射影モデル　代数曲線　ブリル＝ネーター理論

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

代数曲線は種数が2以上の場合は Pioncare 以来の上半平面を$PSL(2,\mathbb{R})$の捻じれの無い離散部分群(Fuchsian surface group と呼ばれる)で割る事で具体的に構成できるが、更に自己同型群まで込めて考える場合は Poincare の方法に従い$PSL(2,\mathbb{R})$のフックス群と呼ばれる離散部分群が対応するので、一般に自己同型まで考えた代数曲線を扱う場合は位相幾何的な考察が重要な方法の一つであると考えられる。しかし、この考え方は代数曲線を複素多様体と見なすことが基本になっていて多項式系で定義される代数曲線の概念とは少し隔たりがある。本研究はその違いを明確に見て両者の優れた面をそれぞれ見ながら代数曲線、特に自己同型を有する代数曲線に関する研究を行ったものである。

２．研究の目的

位相幾何的な観点で見ることはフックス群の捻じれ部分の観察にあるが、特に自己同型群の有限群としての生成系とその間の関係式を良く知ることが重要で、それは群を置換群として(transitive,imprimitive,primitive の様な見方をして)考える事で必要な生成系や関係式の計算が得やすくなる。この考え方は群を非常に明白に取り扱う事が可能であるのが利点であり、GAP や Magma などの数式処理ソフトで取り扱う際には必ず用いられている方法であるのだが、一方代数曲線の線形系やワイアシュトラス点の様な個別の代数幾何的な問題などに対して、位相的な扱いの部分が強すぎるので少し隔たりが生じてしまうのが欠点である。一方代数曲線を方程式系として捉えると主に線形群の多項式への作用と言う観点で観察することになるので代数幾何的には具体的と捉えることが出来て、しかもこの方法は代数曲線の線形系などの種々の問題との関係が深いので、代数曲線としての研究はこちらの方が主になるが、今度は群の取り扱いが解りにくくなると言う欠点がある。本研究はこの両者をバランス良く取り扱う事を目標としたものである。

３．研究の方法

代数曲線の方程式系に関しては、明白に解るのは平面代数曲線の場合なので当初の計算は主に平面代数曲線に限ったものであった。しかしながら、この平面代数曲線の自己同型群を Poincare の構成法と対比させた場合の一連の結果として平面代数曲線の自己同型群のタイプを transitive,imprimitive,primitive と言う考え方で(名称上は Type a,b,c の様な表記をしての)分類が出来たことが大きい。この分類の仕方から位相幾何的観点からのアプローチ、従来の代数幾何的アプローチの両方を取りまとめた研究が可能になった。つまり平面代数曲線の代数幾何的な様相が明白になっただけでなく Poincare の方法との関係も見やすくなったのである。具体的には、従来の Poincare の考え方はフックス群を上半平面に作用させ、その極大 Fuchsian surface group で基本領域を取り、更にフックス群の基本領域との比較で群を得るものなので、多項式への作用は非常に見にくいのであるが、抽象群の代数曲線への作用は計算できるので、それを基に Breuer などの結果に従って群の対象とする射影空間の射影表現(正確には群の適当な拡大を取ることで射影空間の被覆になるベクトル空間への線形表現)が、かなり大変な計算を必要とはするのは致し方ないが、計算は可能になる。都合の良い事に、この計算結果が先の平面曲線の自己同型群の分類との親和性が良いので、極めて煩雑ではあるが(しかしながら GAP や Magma の様な数式処理ソフトでは取り扱えるレベルの)地道な計算により射影平面に種々の問題への応用が可能になるのである。

４．研究成果

(1)論文

①Automorphism group of plane curve computed by Galois points　(幾つかのシリーズ)

平面代数曲線のタイプ分けによる分類を用いてガロア点に関する研究を行ったものである。このガロア点は群の生成系の中で複素鏡映に対応するものが出てくる場合に、その固定点として代数曲線上に現れる点である。この定義は一般的ではないが、ガロア点の良く言われる定義は代数曲線を代数関数体だと思った際に、何らか部分体上のガロア拡大として、代数関数体が構成される場合、部分体を代数曲線の点の持つ情報で得ることが出来るかと言う問題として捉えると言う言い方が良く使われるが、この論文は結論はその形であっても、方法論的には複素鏡映の研究であり、その生成系としての複素鏡映がどの様に現れるかを見る際に位相幾何的観点が重要な役割をしているものである。

②On γ-Hyperelliptic Weierstrass Semigroups of Genus　6γ

③The Weierstrass Semigroups on Double Cover of genus Two Curves

これらは共にワイアシュトラス点に関する研究であるが一つは二重被覆の形になっている時に得られる事が予想されるワイアシュトラス半群の代数曲線による具体的な構成の話であり、もう一つは Torres の導入した一般次の被覆面として得られる事が予想されるワイアシュトラス点が、どの様な条件で出現するかについて研究したものである。

(2)研究集会

本研究ではこの様な幾つかの成果の拡張の可能性を探る場を求め、同様な研究を行う研究者たちとの研究集会を行っている。研究集会は 2015 年から毎年、補助事業期間中であっても(必要に応じて Zoom などによる遠隔開催)行った。これらにより得られた知見として、本研究での方針は代数曲線族を考える際にも有効であり、成果として自己同型群がどの様な挙動をとるなどの研究にも繋がる事が判明した。

更に標数が正である体の上のガロア点の研究との交流により、正標数の代数曲線の自己同型群についても、これらの一連の議論が応用可能であることが解り幾つか計算を行っている(未出版)。これらは 1900 年代の初頭の研究ではあるが Mitchel などの群のモジュラー表現を幾何学的に扱う考え方を基にしている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Harui Takeshi、Miura Kei、Ohbuchi Akira	４．巻 94
２．論文標題 Automorphism group of plane curve computed by Galois points, II	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	６．最初と最後の頁 59～63
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.94.59	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Komeda Jiryo、Ohbuch Akira	４．巻 48
２．論文標題 On γ-Hyperelliptic Weierstrass Semigroups of Genus　6γ	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series	６．最初と最後の頁 209～218
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00574-016-0002-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Akira Ohbuchi and Kei Miura	４．巻 vol.56
２．論文標題 Automorphism group of plane curve computed by Galois points,	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Beitrage zur Algebra und Geometrie	６．最初と最後の頁 695-702
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13366-013-0181-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Akira Ohbuchi and Jiryo Komeda	４．巻 vol.38
２．論文標題 The Weierstrass Semigroups on Double Cver of genus Two Curves	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Tukuba Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 201-206
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Akira Ohbuchi and Kei Miura	4．巻 56 (2)
2．論文標題 Automorphism group of plane curve computed by Galois points	5．発行年 2015年
3．雑誌名 Beitrge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry	6．最初と最後の頁 695-702
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13366-013-0181-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 –

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 大渕　朗
2．発表標題 Torres の定理の拡張について
3．学会等名 ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」（招待講演）
4．発表年 2015年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

–

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	米田　二良 (KOMEDA Jiryo) (90162065)	神奈川工科大学・基礎・教養教育センター数学系列・教授 (32714)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関