

令和 2 年 7 月 4 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04825

研究課題名(和文)代数曲線束構造を通じた代数曲面の研究

研究課題名(英文)Study on algebraic surfaces via fibration structure

研究代表者

村上 雅亮(Murakami, Masaaki)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：10378599

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は代数曲面論で重要な役割をはたす代数曲線束構造の研究を進展させ、一般型代数曲面の構造を解明することを目的として行われたが、部分的知見を得るとともに、その応用として、重要な不変量である第1 Chern数が9、構造層のEuler数が5であり、第1 Chern類が整係数コホモロジー群のなかで3で割り切れるの代数曲面について、完全な構造定理を得、さらに、可微分構造の一意性、モジュライ空間の次元及び単有理性、標準写像の振る舞いを明らかにすることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上に述べた我々の曲面は幾何種数が4になるが、幾何種数4の一般型曲面は、標準写像の振る舞いの観点から、古くから注目されてきたクラスであり、現在ほとんど分かっていない第1 Chern数が8以上の場合に、モジュライ空間の連結成分をまるまる1つ見つけ、研究を押し進めることができた。代数曲線束構造の今後の研究についての手がかりの為のものであったが、2-標準写像の非双有理性の研究についての副産物的な小結果に繋がったほか、今野一宏氏による正規標準曲面の研究とも関連が判明した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study was developing some approach for the study of fibration structures, and its application to some problems on complex algebraic surfaces of general type. In addition to some partial results on the original purposes, we obtained as their application some results on minimal complex surfaces with the first Chern number 9, the Euler characteristic of the structure sheaf 5, and the first Chern class divisible by 3. These include a complete structure theorem for the surfaces of this class, the uniqueness of the underlying differentiable structure, the unirationality and the dimension of the moduli space, and some concrete descriptions on the behaviour of the canonical map.

研究分野：複素代数幾何学

キーワード：一般型代数曲面

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(射影的)代数曲面から(射影的)代数曲線への全射正則写像を代数曲線束と呼ぶ。このような構造があると底空間の情報とファイバーの情報がもとの代数曲面の構造を研究する際の手がかりを与える。このようなこともあり、代数曲線束構造は、古典的イタリア学派の時代より、さまざまに研究、応用され、代数曲面論のなかで欠かせない重要な役割を果たしてきた。様々な研究をへて、現在では Hirzebruch 曲面への射影を用いたアプローチ、相対標準環からのアプローチなど、多くのアプローチがあるが、この様な中で、近年、F. Catanese と R. Pignatelli は、相対標準環からある種のデータを抽出するアイデアにより、一般ファイバーが種数 2 曲線の場合と、一般ファイバーが非超楕円的種数 3 曲線で全てのファイバーが数値的 2-連結な場合に、新しいタイプの構造定理をあたえた ([1])。

[1]Catanese, F., Pignatelli, R.: Fibrations of low genus. I, Ann. Sci. E'cole Norm. Sup.(4) 39 (2006) 1011--1049

2. 研究の目的

上記の Catanese-Pignatelli の方法は[1], [2]など既にいくつかの論文で応用されており、特に[2]では、上記の構造定理を用いることにより、ファイバーの種数が 2 の場合に、標準写像が束となる曲面のうち第 1 Chern 数が下限に近いものが全て分類されている。そこで、申請者は、上記の Catanese 及び Pignatelli による方法をより一般の場合に拡張できないか考え、すでに一般ファイバーが超楕円的種数 3 曲線で全てのファイバーが数値的 2-連結な場合に部分的な結果を得ていたので、これをより一般の場合に拡張し、[2]の類似など、いくつかの一般型曲面の研究に応用することを目的とした計画を立てた。

[1]Bauer, I., Pignatelli, R.: Surfaces with $K^2=8$, $p_g=4$ and canonical involution, Osaka J. Math. 46 (2009) 799--820

[2]Pignatelli, R.: On surfaces with a canonical pencil, Math. Z. 270 (2012), 403--422

3. 研究の方法

すでに得られている部分的な結果をたよりに、代数曲線束の相対標準環をしらべ、そこから相対標準環の構造を決定するのに十分な情報を抽出することを考えた。そのさい、完全に一般にしまうと、複雑になりすぎる可能性があるので、いくつかの具体的な問題への応用を試みることにし、構造定理の扱うべき代数曲線束の範囲を模索することをも方針とした。また、そのために相対標準環の斉次部分にあらわれるベクトル束を調べるといのが方針であった。

4. 研究成果

- (1) 当初の目的であった代数曲線束構造は期限内には計画どおり発展させることはできなかったが、その方向を模索するための実験のなかで、自身による部分的結果と Catanese-Pignatelli の結果を応用することにより、第 1 Chern 数 9、構造層の Euler 数 5 で、第 1 Chern 類が整係数コホモロジー群の中で 3 でわり切れる一般型複素代数曲面について、完全な構造定理を得ることができた(標準モデルが(1,2,2,3,5)型荷重射影空間の中で斉次 6 次式と斉次 10 次式により cut out される完全交差多様体になるというもの)。また、この構造定理を用いることにより、モジュライ空間が 34 次元単有理多様体になること、下部可微分構造の一意性を示し、さらに標準写像の振る舞いを明らかにすることができた。我々の曲面の幾何種数は 4 になるが、幾何種数 4 の一般型曲面は、標準像が 3 次元射影空間の中で唯 1 つの方程式により書き下されることが期待できることから、標準写像の振る舞いの研究における重要な対象として、古くから盛んに研究されてきた。現在のところ第 1 Chern 数が 7 のものまでしか完全な分類が得られておらず、第 1 Chern 数 8 以上のものについては、[1],[3]など、いくつかの例や部分的分類が知られているだけの状態である。そのなかで、[6]を受けて第 1 Chern 数 8 の場合にモジュライ空間の連結成分をまるまる 1 つ書き下してみた Catanese-Liu-Pignatelli による[2]に次いで、第 1 Chern 数 9 の場合にモジュライ空間の連結成分をまるまる 1 つ書き下したことになる。また、副産物として、Ciliberto-Francia-Mendes Lopes による 2-標準写像の非双有理性の研究[4]にあらわれる、(標準写像が代数曲線束構造を誘導する)ある場合が実際には存在しないことを証明し、彼らの結果を(ほんの少しではあるが)精密化することができた。今後の課題としては、上の研究で用いられた手法を第 1 Chern 類が整係数コホモロジー群の中で大きな数で割り切れる一般型曲面の研究に応用し、様々な興味深い代数曲面を構成することが挙げられる。さらに、我々の曲面は K. Konno による正規標準曲面の研究[5]のリストの中で、構成できていなかった場合の例をあたえることも判明したので、今後この方面の研究にも寄与する可能性がある。
- (2) 分担者は複素多様体上の随伴束の解析空間への固有正則写像による高次順像について

も研究し,多様体の Kaehler 性と弱擬凸性そしてベクトル束の曲率の適切な正值性の仮定のもとで,高次コホモロジーに対する消滅定理を得た.これは Fujino の予想への解答であるが,Ohsawa の結果の高次順像への一般化および Kollár の結果の複素幾何的な状況への一般化と見なせる.

- (3) 分担者はさらに双有理幾何学にあらわれる対数的標準特異点に対する複素解析的理論の構築を目標に,対数的標準特異点を持つ多様体上の高次コホモロジーの理論を研究し,複素幾何的な状況下,すなわち曲率の半正定値性の仮定の下で,純粹対数端末特異点で機能する単射性定理を得た.これは分担者がこれまでに研究して来た川又対数端末の特異点に対する理論の一般化ともみなせ,その証明の過程で,強 Lefschetz 定理の精密化や,適切な状況下での対数的標準特異点の“悪さ”の積分評価を与えた.
- (4) 分担者は(正則)断面曲率についても研究した.「正值な断面曲率を持つ射影多様体は有理連結である」という Shing-Tung Yau による予想は近年 Xiaokui Yang により肯定的に解決されていたが,分担者はこの類似を準正值な場合について研究し,Heier-Wong のアイデアを用いて,準正值な断面曲率を持つ射影多様体が有理連結になることを証明した.さらに非負断面曲率を持つ射影多様体の構造を調べ,非負断面曲率を持つ射影多様体は平坦な Kaehler 多様体への局所自明な射を持つこと,そして,その射のファイバーが有理連結になることを示した.さらに,その不変被覆面が flat なユークリッド空間と非負断面曲率を持つ有理連結多様体の直積への双正則かつ等長な同型射を許すことを示した.

<引用文献>

- [1]Bauer, I., Pignatelli, R.,: Surfaces with $K^2=8$, $p_g=4$ and canonical involution, Osaka J. Math. 46 (2009) 799--820
- [2]Catanese, F., Liu, W., Pignatelli, R.: The moduli space of even surfaces of general type with $K^2=8$, $p_g=4$, and $q=0$, J. Math. Pures Appl. 101 (2014) 925--948
- [3]Ciliberto, C.: Canonical surfaces with $p_g=p_a=4$ and $K^2=5, \dots, 10$, Duke Math. J. 48 (1981) 121--157
- [4]Ciliberto, C., Francia, P., Lopes, M. M.: Remarks on the bicanonical map for surfaces of general type, Math. Z. 224 (1997), 137--166
- [5]Konno, K.; Normal canonical surfaces in projective 3-space, Internat. J. Math. 28 (2017) 1750076, 17pp
- [6]Oliverio, P.A., On even surfaces of general type with $K^2=8$, $p_g=4$, $q=0$, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 113 (2005), 1--14

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masaaki Murakami	4. 巻 -
2. 論文標題 Surces with $c_1^2=9$ and $\chi=5$ whose canonical classes are divisible by 3	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 arXiv mathematics	6. 最初と最後の頁 1--29
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://arxiv.org/abs/2003.12995	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 S. Matsumura	4. 巻 27
2. 論文標題 An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Algebraic Geom.	6. 最初と最後の頁 305-337
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Matsumura	4. 巻 19
2. 論文標題 A transcendental approach to injectivity theorem for log canonical pairs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze	6. 最初と最後の頁 331-334
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件（うち招待講演 18件/うち国際学会 10件）

1. 発表者名 Masaaki Murakami
2. 発表標題 Surfaces with $c_1^2 = 9$ and $\chi=5$ whose canonical classes are divisible by 3
3. 学会等名 Differential, Algebraic and Topological Methods in Algebraic Geometry, Grand Hotel San Michele, Cetraro, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 村上雅亮
2. 発表標題 第1 Chern 数 9, 構造層のEuler 数 5 のある種の代数曲面について
3. 学会等名 2019 日本数学会年会, 東京工業大学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 On the image of MRC fibrations of projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature
3. 学会等名 Seminar of Differential Geometry, Chinese Academy of Sciences (Beijing) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 Projective klt pairs with nef anti-canonical divisor and rationally connected fibrations
3. 学会等名 Seminar of Algebraic Geometry, Chinese Academy of Sciences (Beijing) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 Projective klt pairs with nef anti-canonical divisor and rationally connected fibrations
3. 学会等名 Workshop on stabilities in Kaehler geometry and related topic, Tohoku University (Sendai) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 On projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature
3. 学会等名 The 14th Algebra-Analysis-Geometry seminar, Kagoshima University (Kagoshima) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Murakami
2. 発表標題 Surfaces with $c_1^2=9$ and $\chi=5$ whose canonical classes are divisible by 3
3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics, Kochi University of Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 村上雅亮
2. 発表標題 On a type of surfaces with $c_1^2=9$ and $\chi=5$
3. 学会等名 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺2019」, 高知大学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Murakami
2. 発表標題 On a type of surfaces with $c_1^2=9$ and $\chi=5$
3. 学会等名 Degenerations, algebraic surfaces and related topics, Kobe University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 On projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature
3. 学会等名 International conference on Complex Analysis and Geometry, Pstech (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 On projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XV, 湘南国際村センター (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 RC positivity and the geometry of rational curves
3. 学会等名 Yang Mathematicians Workshop on Several Complex Variables 2019, Osaka City University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 On projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature
3. 学会等名 Geometric Complex Analysis on Foliations and Dynamics, RIMS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 Holomorphic sectional curvature and foliations of truly flat tangent vectors
3. 学会等名 Geometry of foliations and its applications, RIMS (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 On projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature
3. 学会等名 2019 Taipei Conference on Complex Geometry, Institute of Mathematics Academic Sinica (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 多様体の曲率の正值性と有理曲線の存在問題
3. 学会等名 熊本阿蘇研究集会, 休暇村 南阿蘇 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 小平の消滅定理とその一般化について $-L^2$ -理論と調和積分論
3. 学会等名 Kodaira's Theory on Complex Manifolds and its Development, RIMS (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 反相対標準束の正值性とその順像層の平坦性
3. 学会等名 複素多様体上の直線束と多重劣調和函数，東北大学（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 S. Matsumura
2. 発表標題 半正值な曲率を持つ射影多様体の有理連結射について
3. 学会等名 日本数学会秋期総合分科会函数論分科会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	松村 慎一 (Matsumura Shin-ichi) (90647041)	東北大学・理学研究科・准教授 (11301)	