

令和元年5月13日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04831

研究課題名（和文）代数多様体のアフィンファイブレーション構造と代数群の作用

研究課題名（英文）Affine fibrations on algebraic varieties and algebraic group actions

研究代表者

増田 佳代（MASUDA, Kayo）

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40280416

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：3次元以上の高次元アフィン代数多様体上の加法群および加法群の直積であるユニポテント群の作用の商写像として得られるアフィンファイブレーション構造について研究をおこなった。その結果、アフィン代数多様体が非特異かつfactorial、すなわち座標環が一意分解整域である場合、その特異ファイバーの構造などファイブレーション構造についてある程度解明することができた。特に代数多様体が3次元の場合にはファイブレーション構造をほぼ解明することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アフィン空間は代数幾何学におけるもっとも基本的かつ重要な対象であるにもかかわらず、その代数幾何学的本質が十分わかっているとは言い難い。実際、アフィン空間上の代数群の作用、特に加法群などのユニポテント群の作用がどのようなものかは、3次元以上の高次元の場合はよくわかっていない。本研究の成果は、アフィン空間を含むようなあるクラスの高次元アフィン代数多様体の代数幾何学的構造の解明につながるものである。

研究成果の概要（英文）：We worked on the affine fibration structures on affine algebraic varieties obtained as the quotient morphism by the algebraic group actions of the additive or unipotent groups. We succeeded to some extent in describing the fibration structure such as the singular fibers when the variety is nonsingular and factorial. Especially when the variety is a threefold, the structure can be described to a great extent.

研究分野：アフィン代数幾何学

キーワード：アフィンファイブレーション 加法群の作用 ユニポテント群の作用

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初は, Danielewski 超曲面とよばれる加法群の作用をもつ複素アフィン代数多様体についての研究が大きく進んだ時期であった. 代数多様体の族 $\{X_r\}$ が noncancellation property をもつとは, $r \neq s$ ならば $X_r \not\cong X_s$ であるが $X_r \times A^1 \cong X_s \times A^1$ が成り立つときにいう. 3次元の場合のある種の Danielewski 超曲面が 3次元アフィン空間 A^3 と同型になるための必要十分条件が N. Gupta によって得られ, また Danielewski 超曲面の代表的な例である Koras-Russell 3-fold とアフィン直線 A^1 との直積が自明な Makar-Limanov 不変量をもつこと, すなわち代数的に独立な 4 つの加法群の作用をもつことが A. Dubouloz によって示された. さらに研究代表者によって, 一般化された factorial な Danielewski 超曲面が noncancellation property をもつこと, およびその代数的特徴づけが得られた. Danielewski 超曲面を手掛かりにアフィン代数多様体上の加法群の作用やその A^1 ファイブレーション構造について, 研究代表者や分担者宮西正宜氏, 共同研究者の R.V.Gurjar 教授 のグループや M. Zaidenberg, H. Flenner, S. Kaliman, N. Gupta などの研究者によって活発な研究が行われつつあった.

2. 研究の目的

当初の研究目的は以下のものである.

- (1) 一般化された Danielewski 超曲面上の A^1 ファイブレーション構造の解明.
- (2) 高次元の一般化された Danielewski 超曲面の族におけるアフィン空間の特徴づけ.

3. 研究の方法

- (1) 加法群, 高次元ユニポテント群の作用に着目して, アフィンあるいは射影的代数多様体上の A^n ファイブレーション構造についての研究を, 研究代表者の増田, 分担者の宮西氏, 共同研究者の R.V. Gurjar 教授, P. Russell 教授とともにおこなった. また, 最新の知見を得たり, 情報交換のために国内外の代数幾何学や可換環論の研究集会に積極的に参加し, 得られた成果について発表をおこなった.
- (2) アフィン代数幾何学分野の研究発表と交流の場として, アフィン代数幾何学研究集会を毎年 3 月に関西学院大学梅田キャンパスにおいて開催してきたが, これを本研究期間中も継続して開催した. 2019 年 3 月で第 17 回となった.

4. 研究成果

- (1) 研究代表者の増田, 分担者の宮西氏, 共同研究者の R.V. Gurjar 教授は, 射影代数多様体 V 上の加法群の作用について共同研究をおこない, V 上に stratification 構造が入ることを示し, その構造について調べた. 得られた成果は, 論文 "Unipotent group actions on projective varieties" として日本数学会の Advances Studies in Pure Mathematics の 75 巻 Algebraic Varieties and Automorphism Groups に発表した. 射影代数多様体上のユニポテント群の作用による stratification 構造について書かれた文献はあまりなく, その意味においても重要なものであると考える.
- (2) 研究代表者の増田, 分担者の宮西氏, 共同研究者の R.V. Gurjar 教授は, A^2 ファイブレーション構造をもつ 3次元アフィン代数多様体 X について加法群の作用の観点から研究を行い, X の幾何学的性質を明らかにし, また X がある種の一般化された Danielewski 超曲面と同型になるための必要十分条件を求めた. 得られた結果は, 論文 "Affine threefolds with A^2 -fibrations" として専門誌 Transformation Groups に発表した.
- (3) 研究代表者の増田は, noncancellation property をもつ factorial な代数曲面の族の存在を示し, その代数的特徴づけを与えた. 得られた結果は, 論文 "Families of hypersurfaces with noncancellation property" としてアメリカ数学会の専門誌 Proceedings of American Mathematical Society に発表した.
- (4) 研究代表者の増田, 分担者の宮西氏, 共同研究者の R.V. Gurjar 教授および M. Koras 教授, P. Russell 教授は, 加法群の作用を持つ 3次元アフィン代数多様体について共同研究をおこない, 加法群の作用による商写像として得られる A^1 ファイブレーション構造について明らかにした. 得られた結果は, 論文 "Affine threefolds admitting G_a -actions" として専門誌 Mathematische Annalen に発表した. これにより, これまでに知られている結果と(2), (3) の結果を合わせて, 3次元の factorial なアフィン代数多様体上の A^1 ファイブレーション構造については大枠は解明されつつある. 特に 3次元の場合の研究目的はほぼ達成された. 4次元の場合も特殊な場合においては, 我々の研究および S. Kaliman の研究などによって部分的に解明されつつあるが, 高次元の場合は今後の研究課題である. 4次元以上の高次元の場合は, 高次元ユニポテント群の作用の解明, すなわち A^n シリンダーがどのように代数多様体の中に入るかという A^n ファイブレーション構造の解明が大きなポイントとなる.

- (5) 研究代表者の増田, 分担者の宮西氏, 共同研究者の R.V. Gurjar 教授は, アフィン代数多様体上のユニポテント群の作用による商写像として得られる A^n ファイブレーション構造について, ドイツの Oberwolfach 数学研究所において共同研究をおこなった. 得られた結果は, 論文 "Affine space fibrations" として Oberwolfach Preprint series に発表した. これは, アフィン代数多様体上の A^n ファイブレーション構造についてユニポテント群の作用の観点から我々の共同研究によってこれまでに得られた成果をまとめたものである.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

- R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi,
Affine space fibrations, Oberwolfach Preprints, 19 (2018), 1–51. 査読なし
DOI: 10.14760/OWP-2108-19
- R.V. Gurjar, M. Koras, K. Masuda, M. Miyanishi, P. Russell,
Affine threefolds admitting G_a -actions,
Mathematische Annalen online-first (2018), 査読あり
DOI:10.1007/s00208-017-1622-3
- R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi,
Unipotent group actions on projective varieties,
Advanced Studies in Pure Mathematics 75 (2017), 119–162. 査読あり
<https://projecteuclid.org/euclid.aspm/1537498698#toc>
- K. Masuda,
Families of hypersurfaces with noncancellation property,
Proceedings of American Mathematical Society, 145 (2017), 1439–1452. 査読あり
DOI: 10.1090/proc/13489
- M. Miyanishi,
Wild Z/pZ -actions on algebraic surfaces,
Journal of Algebra 477 (2017), 360–389. 査読あり
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.12.025
- R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi,
Affine threefolds with A^2 -fibrations,
Transformation Groups 22 (2017), 187–205. 査読あり
DOI: 10.1007/s00031
- S. Chakraborty, R.V. Gurjar, M. Miyanishi,
Pure subrings of commutative rings,
Nagoya mathematical Journal 221 (2016), 33–68. 査読あり
DOI: 10.1017/nmj.2016.2
- S. Chakraborty, R.V. Gurjar, M. Miyanishi,
Factorially closed subrings of commutative rings,
Algebra and Number theory 9 (2015), 1137–1158. 査読あり
DOI: 10.2140/ant.2015.9.1137

[学会発表](計 12 件)

- K. Masuda,
Hypersurfaces with G_a -actions,
第 17 回アフィン代数幾何学研究集会 2019 年
- M. Miyanishi,
Triviality of affine space fibrations,
第 17 回アフィン代数幾何学研究集会 2019 年
- M. Miyanishi,
Triviality of affine space fibrations,
Conference in Geometry and Representations 2019 年
- M. Miyanishi,
Affine space fibrations,
Conference on Algebraic Geometry 2018 年
- M. Miyanishi,
 G_a -actions in positive characteristic,
野田代数幾何学シンポジウム 2018 年
- M. Miyanishi,
Geometry of Artin-Schreier coverings,
第 16 回アフィン代数幾何学研究集会 2018 年
- K. Masuda,
Forms of A^3 with unipotent group actions,

Polynomial Rings and Affine Algebraic Geometry 2018 年

M. Miyanishi,

Singular fibers of A^1 -fibrations,

Polynomial Rings and Affine Algebraic Geometry 2018 年

M. Miyanishi,

Remarks on the generalized Jacobian conjecture for A^2/G ,

第 15 回アフィン代数幾何学研究集会 2017 年

M. Miyanishi,

A remark on the generalized Jacobian conjecture for A^2/G ,

Higher-dimensional birational geometry, holomorphic dynamics and their interactions

2017 年

M. Miyanishi,

Affine threefolds with G_a -actions,

Complex affine geometry, hyperbolicity and complex analysis 2016 年

M. Miyanishi,

Singular fibers of A^1 -fibrations on affine threefolds,

第 14 回アフィン代数幾何学研究集会 2016 年

〔図書〕(計 1 件)

K. Masuda, T. Kishimoto, H. Kojima, M. Miyanishi, M. Zaidenberg,

Algebraic Varieties and Automorphism groups, Mathematical Society of Japan, 2017, 474

〔その他〕

ホームページ等

<https://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kayo/>

<http://www10.plala.or.jp/masamiyanishi/miya/>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：宮西 正宜

ローマ字氏名：MIYANISHI, Masayoshi

所属研究機関名：関西学院大学

部局名：数理・データ科学教育研究センター

職名：客員研究員

研究者番号 (8 桁): 80025311

(2)研究協力者

研究協力者氏名：Rajendra. V. Gurjar

ローマ字氏名：GURJAR, Rajendra. V.

研究協力者氏名：Peter Russell

ローマ字氏名：RUSSELL, Peter

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。