

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：55501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04833

研究課題名(和文) 高次被覆の理論とモジュライ空間による代数曲線束のジオグラフィーの研究

研究課題名(英文) Studies of the geography of fibrations of algebraic curves from the theory of higher degree coverings and moduli spaces

研究代表者

石田 弘隆 (Ishida, Hirotaka)

宇部工業高等専門学校・一般科・教授

研究者番号：30435458

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：非特異射影代数曲線上の代数曲線束の構造をもつ一般型曲面に関して、相対的オイラー・ポアンカレ標数、相対標準因子の自己交点数とファイバーの種数の値の組にはどのようなものが存在するかという代数曲線束のジオグラフィーの問題を研究した。3重被覆およびガロア4重被覆の理論を用いて、クリフォード指数が1,2となる代数曲線束についてこれらの不変量の間になり立つ不等式関係を証明した。また、新たに開発した射影直線束の被覆を用いた代数曲線束の構成法を駆使して、多くの代数曲線束の存在性を証明した。

研究成果の概要(英文)：We study the problem of the geography of fibrations of algebraic curves which is the question of which triplets of the relative Euler-Poincare characteristic, the self-intersection number of the relative canonical divisor and the genus of a fiber can occur for surfaces of general type with a fibration over smooth projective algebraic curve. By using the theory of triple coverings and Galois quadruple coverings, we give inequalities among these invariants for fibrations of Clifford index 1 and 2. Also we prove the existence of many fibrations of algebraic curves by newly developed methods for constructing the coverings of the projective line bundles.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数曲面 代数曲線束 高次被覆 曲面特異点 モジュライ空間

1. 研究開始当初の背景

小平次元による代数曲面の分類において最大のクラスである一般型曲面の研究は1960年代に始まる。代数曲面にはオイラー・ポアンカレ標数や標準因子の自己交点数といった整数値をとる不変量が定まり、Bogomolov-宮岡-Yauの不等式に代表されるように、これらの数値の組み合わせは限定される。このような背景で、1981年にPerssonは座標平面上の格子点を指定したとき、オイラー・ポアンカレ標数の値が第一成分に、標準因子の自己交点数の値が第二成分に一致するような極小一般型曲面は存在するかという問題を提起した。

この問題はPersson自身により第二成分と第一成分の比が小さい格子点に関して解決しているが、このように一般型曲面の不変量の組を座標平面上の格子点にプロットして考えると、次の問題が自然に浮かんでくる。

問題(1)：格子点に対応する一般型曲面はどのような構造的特徴をもち得るか。

問題(2)：特定の構造をもつ一般型曲面に対応する格子点はどのように分布するのか。

これらの問題は「一般型曲面のジオグラフィ」と呼ばれ、現在も一般型曲面の主な研究指針として、国内外で研究が行われている。問題(2)については、「不変量を固定したときの一般型曲面の構造とモジュライ空間を調査する」という形式で多くの先行研究が存在する。

2. 研究の目的

本研究の研究対象は非特異射影代数曲線上の代数曲線束の構造をもつ一般型曲面とし、ジオグラフィの問題における座標として代数曲面の不変量を相対化した相対的オイラー・ポアンカレ標数および相対標準因子の自己交点数とする。さらに、代数曲線束の構造を表す不変量であるファイバーの種数を座標に加えて、より詳細に上記の一般型曲面のジオグラフィの問題(2)の解明に取り組む。

ファイバーの種数以外にもクリフォード指数がある。これはおおそファイバーから射影直線への被覆次数を定め、例えば、クリフォード指数が0である代数曲線束のファイバーは一般に射影直線の2重被覆(超楕円曲線)となる。超楕円曲線束のジオグラフィに関しては代表者の先行研究があるが、ここで重要な役割を果たしたのが堀川による2重被覆の理論である。超楕円曲線束ではない場合、すなわちクリフォード指数が正の場合に研究を進めていくには、高次被覆に関して2重被覆の理論と同様の理論が不可欠となる。しかし、5次以上の被覆理論は存在しないことから研究期間内にはクリフォード指数を2以下の場合のみを扱うことで、現れる被覆の次数を4以下として以下の2点の解決を目標に研究する。

目標(i)：代数曲線束に対応する格子点のお

およその分布を把握するため、不変量間に成り立つ不等式関係を究明する。特に、相対的オイラー・ポアンカレ標数に関する不等式を導く。

目標(ii)：実際に格子点に対応する代数曲線束の存在性を示すことにより代数曲線束の分布する領域を明らかにする。そのために、不変量の計算が可能かつ多くの代数曲線束を構成することができる方法を開発する。

3. 研究の方法

クリフォード指数の値を1, 2と固定すると、少しの例外を除いてファイバーは射影直線の次数3, 4の被覆となる。目標(i)の解決には、この構造を利用して不変量の計算式からオイラー・ポアンカレ標数と相対標準因子の自己交点数の計算式を与え、これらが含む標準解消に由来する補正項を評価して不変量の間の関係性を導く。

代表者の超楕円曲線束のジオグラフィの問題に関する研究において成果を得る鍵となったのは、2次被覆の分岐跡のパーツを様々組み合わせ、ある関数のグラフを境界とする上半領域内の格子点に対応する超楕円曲線束をすべて構成する方法の開発であった。そこで、この方法を発展させて、高次ガロア被覆を用いた代数曲線束の構成法を開発して目標(ii)の解決にあたる。この方法では網羅できない格子点に関しては、代数曲線のモジュライ空間内にモジュライ写像の像となる曲線を与えて代数曲線束を構成する方法を模索する。

関連する分野の研究者との連携およびその成果の収集を行いながら、本研究課題の成果を発表するために研究会を年度毎に開催する。

4. 研究成果

目標(i)に関しては、Tanによる非ガロア3重被覆の理論を用いて、クリフォード指数が1である代数曲線束のうち、分岐跡上の一般点の逆像が二点となる射影直線束の3重被覆やファイバーが不安定曲線となる場合について、特異点の標準解消に現れる例外因子に課される条件を精密にし、補正項を評価した。その結果として、不変量間の不等式関係を得ることができた。また、クリフォード指数が2である代数曲線束のうち、射影直線束のガロア4重被覆で与えられる場合にも不変量間の不等式関係を得た。

目標(ii)に関しては、研究の方法で述べた代数曲線束の構成法を新たに射影直線束の3重被覆およびガロア4重被覆の場合に開発し、これらを駆使して主に相対標準因子の自己交点数と相対的オイラー・ポアンカレ標数の比(スロープ)が小さい場合に代数曲線束の存在領域を明らかにした。また、モジュライ空間上にモジュライ写像の像を与える代数曲線束の構成法について研究を行い、いくつかの代数曲線束を得ることができた。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

- T. Ashikaga, Multi-dimensional continued fractions for cyclic quotient singularities and Dedekind sums, Kyoto Math. J., 査読有.
- T. Shirane, Connected numbers and the embedded topology of plane curves, Canad. Math. Bull., 査読有.
DOI:10.4153/CMB-2017-066-5
- B. Guerville, T. Shirane, Non-homotopicity of the linking set of algebraic plane curves, J. Knot Theory Ramifications, 査読有, 26, no.13 (2017)
DOI:10.1142/S0218216517500894
- S. Bannai, B. Guerville, T. Shirane, H. Tokunaga, On the topology of arrangements of a cubic and its inflectional tangents, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 査読有, 93, no.6, (2017), pp. 50-53.
- T. Shirane, A note on splitting numbers for Galois covers and \mathbb{P}^1 -equivalent Zariski k -plets, 査読有, Proc. Amer. Math. Soc., 145 (3), (2017), pp. 1009-1017.
- H. Ishida, A lower bound on the Euler-Poincaré characteristic of certain surfaces of general type with linear pencil of hyperelliptic curves, Canadian J of Math., 査読有, 68 (2016), no.1 67-87.
DOI: 10.4153/CJM-2015-032-8
- T. Shirane, Galois closure covers for 5-fold covers between smooth surfaces and its application, Kyushu J. Math., 査読有, 69, no.2 (2015), 229-257.
- T. Ashikaga, Toric modifications of cyclic orbifolds and extended Zagier reciprocity for Dedekind sums, Tohoku Math. J., 査読有, 67 (2015), 323-347.

[学会発表](計20件)

- 白根竹人, 分解グラフと平面曲線の埋込位相, 日本数学会年会, 2018年3月21日, 東京大学.
- 足利正, Castelnuovo-Horikawa index of genus three via signature divisor, 第13回代数・幾何・解析セミナー(招待講演), 2018年2月13日, 鹿児島大学.
- 足利正, Horikawa index of non-hyperelliptic genus three fibration, Seminar on Algebraic Surfaces (招待講演), 2017年12月9日, Dalian Univ. of Tech., Dalian,

China.

- 白根竹人, Splitting graph and embedded topology of plane curves, 10th Workshop on Galois point and related topics(招待講演), 2017年7月16日, KKR 蔵王白銀荘.
- 足利正, Horikawa index of genus three via signature divisor, Mini workshop "fibered Varieties" in honor of Prof. Barja (招待講演), 2017年3月22日, 大阪大学.
- 白根竹人, An invariant of plane curves through Galois covers and Zariski pairs, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2017(招待講演), 2017年3月10日, 東北学院大学.
- 足利正, Log Eichler trace formula and hyperelliptic multiplicity, 代数幾何学ミニワークショップ(招待講演), 2017年1月7日, 兵庫県多可町八千代フラザ.
- 足利正, Horikawa index of genus three and hyperelliptic multiplicity, 代数曲線・曲面とその周辺(招待講演), 2016年11月26日, 大阪大学.
- 石田弘隆, ある射影直線束の3重被覆の相対的オイラー・ポアンカレ標数について, 代数曲線・曲面とその周辺(招待講演), 2016年11月26日, 大阪大学.
- 足利正, Horikawa index of genus three via signature divisor, Seminar on Algebraic Geometry (招待講演), 2016年9月6日, East China Normal Univ, Shanghai, China.
- 白根竹人, Splitting numbers for Galois covers and \mathbb{P}^1 -equivalent Zariski k -plets, 第13回代数曲面ワークショップ at 高知(招待講演), 2016年7月2日, 高知工科大学.
- 白根竹人, Splitting numbers and \mathbb{P}^1 -equivalent Zariski k -plets, Workshop on Hyperplane Arrangements and Singularity Theory (招待講演), 2016年3月24日, 北海道大学.
- 白根竹人, 分岐被覆による平面曲線の分解数と平面曲線の位相について, きりたんぼ数学セミナー(招待講演), 2016年3月20日, 秋田工業高等専門学校.
- 足利正, A certain intersection number on moduli space of genus 3 via Dedekind sum, 代数曲面ワークショップ(招待講演), 2016年2月6日, 首都大学東京.
- 足利正, Dedekind 和を用いた種数3のモジュライ空間上のある交点数表示, 代数幾何学ミニワークショップ(招待講演), 2016年1月9日, 兵庫県多可町八千代フラザ.
- 足利正, Automorphisms of stable curves and invariants of fiber germs, 代数幾何セミナー(招待講演), 2015年11

月 2 日, 高知工科大学 .
足利正, Another realization of
Birman-Hilden relation via
hyperelliptic splitting family,
Mini-Symposium “Topology and
singularities (招待講演), 2015 年 10
月 14 日, 学習院大学

石田弘隆, Hyperelliptic fibrations
with high slope, 特異点と多様体の幾
何学, (招待講演), 2015 年 9 月 25 日,
群馬大学 .

白根竹人, Nodal quartic surfaces and
nodal sextic curves with a contact
conic, 特異点と多様体の幾何学 (招待
講演), 2015 年 9 月 25 日, 群馬大学 .

白根竹人, Galois closure covers for
5-fold covers between smooth surfaces
and its application, Workshop on
Galois point and related topics(招待
講演), 2015 年 9 月 5 日, 神奈川大学 .

[その他]

「代数幾何学研究集会 宇部」ホームペー
ジ

[http://www2.ube-k.ac.jp/sugakuka/
ube2018.pdf](http://www2.ube-k.ac.jp/sugakuka/ube2018.pdf)

[http://www2.ube-k.ac.jp/sugakuka/
ube2017.pdf](http://www2.ube-k.ac.jp/sugakuka/ube2017.pdf)

[http://www2.ube-k.ac.jp/sugakuka/
ube2016.pdf](http://www2.ube-k.ac.jp/sugakuka/ube2016.pdf)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石田 弘隆 (ISHIDA Hirotaka)
宇部工業高等専門学校・一般科・教授
研究者番号: 3 0 4 3 5 4 5 8

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

足利 正 (ASHIKAGA Tadashi)
東北学院大学・工学部・教授
研究者番号: 9 0 1 2 5 2 0 3

白根 竹人 (SHIRANE Taketo)
宇部工業高等専門学校・一般科・准教授
研究者番号: 7 0 6 1 5 1 6 1