

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月18日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04840

研究課題名(和文) ガウス写像の値分布論の進展とそれに基づく曲面の大域的性質の研究

研究課題名(英文) Development of value distribution theory of Gauss maps of immersed surfaces in space forms and their applications to global property of surfaces

研究代表者

川上 裕 (Kawakami, Yu)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：60532356

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：4次元ユークリッド空間内の完備極小曲面のガウス写像の像の性質の研究を行った。特に、除外値数の上限や一意性定理といったガウス写像の値分布論的性質の最良の結果とその幾何学的解釈を与えた。またその応用として、複素2次元空間内の完備極小ラグランジアン曲面のガウス写像及び4次元ユークリッド空間内の向き付け不可能な完備極小曲面の一般化されたガウス写像の像の大きさの最良の評価を与えた。また、3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の極大曲面および3次元ド・ジッター空間内の平均曲率1の曲面の解析的延長とそれに関連した大域的性質を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲率条件をもつ空間内の曲面は、現実社会の物理的現象としてあらわれるものの数学的モデルになっていることが多い。このような事情から古くから研究され、その成果は物理学や工学など様々な分野の研究に応用されている。本課題の手法は、その実現性をガウス写像という視点で調べるものである。本研究成果は、曲率条件をもつ空間内の曲面の実現性の問題の本質を深めるものであり、幾何学及び複素解析学の研究の発展に意義をもつと考えられる。

研究成果の概要(英文)：We perform a systematic study of the images of the Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 4-space. In particular, we give a geometric interpretation of value-distribution theoretic properties for the Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 4-space, for example, the maximal number of exceptional values and unicity theorem. We also provide optimal results of the size of the image under the Gauss map of a complete minimal Lagrangian surface in the complex 2-space and the generalized Gauss map of a complete nonorientable minimal surface in Euclidean 4-space. We also study the analytic extensions and related global properties of maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space and CMC-1 surfaces in the de-Sitter 3-space.

研究分野：微分幾何学，複素解析学，幾何解析

キーワード：幾何学 複素解析学 曲面論 値分布論 極小曲面 ガウス写像 等角計量 解析的延長

1. 研究開始当初の背景

曲率条件をもつ空間内の曲面は、現実社会の物理的現象としてあらわれるものの数学的モデルとなっていることが多い。実際、平均曲率が恒等的にゼロの曲面である極小曲面は石鹸膜、平均曲率が一定の曲面はシャボン玉の数学的モデルである。このような事情から、曲率条件をもつ空間内の曲面の性質を調べる研究は古くから活発に研究されている。しかし、一般に曲率条件をもつ曲面の大域的性質を調べることは非常に難しい。一方で、ユークリッド空間内の極小曲面論をモデルとして、ガウス写像の値分布論的性質に基づいて大域的性質を調べる研究が存在する。この研究は、解析的に証明が難しい性質を幾何学的に理解しやすい状況で導くことができるという特色をもつ。ただ、この研究は解明されていない幾つかの事実が存在する。例えば、有限全曲率完備極小曲面のガウス写像の除外値数の上限や他の空間型内の曲面のクラスへの応用などが挙げられる。

2. 研究の目的

曲面の大域的性質を調べることは非常に難しいが、極小曲面論における「ベルンシュタインの定理」と「リュービルの定理」との関係のように、ガウス写像の像の性質を調べることで、曲面の大域的性質を幾何学的に理解しやすい状況で導くことができることもある。本研究では、空間内の曲面の大域的性質をガウス写像の性質から導く理論を構築することを目的としている。

3. 研究の方法

(1) 以前の研究課題「ガウス写像の性質に基づく曲面の大域的性質の研究(課題番号: 24740044)」において、3次元ユークリッド空間内の完備極小曲面のガウス写像や3次元双曲型空間内の弱完備な平坦波面の標準形式の比などの除外値数の上限や一意性定理といった値分布論的性質の幾何学的解釈の研究を行った。本課題では、その手法を4次元ユークリッド空間といったより高次元の空間内の曲面論へ適用できるように改良を行って性質を調べた。また、その結果をもとに向き付け不可能な極小曲面の一般化されたガウス写像や複素2次元空間内の完備極小ラグランジアン曲面のガウス写像の像の大域的性質を調べた。

(2) 3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の極大曲面及び3次元ド・ジッター空間内の平均曲率が1の曲面のある種の特異点を許容したクラスの大域的性質、特に解析的延長の研究については、すでに梅原雅顕氏、山田光太郎氏らの先行研究がある。本課題では、これらのクラスにおける重要な具体例である小林曲面やカテナイドについて、ワイエルシュトラスの表現を用いて解析的延長を考え、埋め込み性や分類などの大域的性質を調べた。

4. 研究成果

(1) 梅原雅顕氏、山田光太郎氏、國分雅敏氏、ウェインラスマン氏らとの共同研究で、3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の完備極大曲面を解析的延長した平均曲率ゼロの曲面の中で、ジョージ・ミック型曲面を含む小林曲面と呼ばれる曲面の例の構成及び分類を行った。この結果は【雑誌論文 と 】で発表した。

(2) 相山玲子氏、芥川和雄氏、今川悟氏との共同研究で、4次元ユークリッド空間内の完備極小曲面のガウス写像の像の性質の幾何学的解釈を与えた。特に、このクラスのガウス写像を含む、より一般化した正則写像の像の大きさの最良の評価を与え、藤本坦孝氏により得られたガウス写像の除外値数の上限の幾何学的解釈を示すことができた。また、この結果を用いることで、複素2次元空間内の完備極小ラグランジアン曲面のガウス写像の像の性質や向き付け不可能な完備極小曲面の一般化されたガウス写像の像の性質といった、これまで知られていなかった性質を統一的に導くことができた。この結果は【雑誌論文 】で発表した。

(3) ベトナムのファム・フォン・ハ氏との共同研究で、4次元ユークリッド空間内の完備極小曲面のガウス写像の一意性定理を幾何学的解釈も含めて得ることができた。この結果は【雑誌論文 】で発表した。

(4) 梅原雅顕氏、山田光太郎氏、藤森祥一氏らとの共同研究で、3次元ド・ジッター空間内の平均曲率が1となる曲面の例である楕円型カテナイドについて、これまであまり特徴が知られていなかった2つの例外型のクラスの性質を調べ、特に閉解析的延長を許すことを発見した。この結果は【雑誌論文 】で発表した。

(5) 様々な曲面のクラスのガウス写像の値分布論的性質に関する報告者の研究成果の総説を記し、【雑誌論文 と 】で発表した。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 7 件)

Yu Kawakami, Value distribution for the Gauss maps of various classes of surfaces, Sugaku Expositions, 査読有, 掲載決定 .

S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, Analytic extension of exceptional constant mean curvature one catenoids in de Sitter 3-space, Mathematical Journal of Okayama University, 査読有, 掲載決定 .

Pham Hoang Ha, Yu Kawakami, A note on a unicity theorem for the Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean four-space, Canadian Mathematical Bulletin, 査読有, Vol. 61, 2018, pp. 292-300, DOI: 10.4153/CMB-2017-015-0.

R. Aiyama, K. Akutagawa, S. Imagawa, Y. Kawakami, Remarks on the Gauss images of complete minimal surfaces in Euclidean four-space, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 査読有, Vol. 196, 2017, pp. 1863-1875, DOI: 10.1007/s10231-017-0643-6.

S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, Analytic extensions of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 54, 2017, pp. 249-272.

川上裕, 曲面の Gauss 写像の値分布, 数学, 査読有, 69 巻, 2017, pp. 56-69 .

S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, Entire zero mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space, Quarterly Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 67, 2016, pp. 801-837, DOI: 10.1093/qmath/haw038.

[学会発表] (計 14 件)

Yu Kawakami, Value distribution theory for the Gauss maps of several classes of surfaces, The 2nd International Conference on Geometry of Submanifolds and Integrable Systems, 2019 年 3 月 25 日 .

川上裕, Recent topics on the study of the Gauss images of minimal surfaces, 東大複素解析幾何セミナー, 2018 年 1 月 22 日 .

川上裕, 曲面のガウス写像の値分布論入門, 琵琶湖特異点論ワークショップ, 2017 年 12 月 20 日 .

Yu Kawakami, Global properties for the Gauss images of various classes of surfaces, 第 23 回複素幾何シンポジウム (金沢), 2017 年 11 月 7 日 .

Yu Kawakami, Global properties for the Gauss images of various classes of surfaces, The 3rd Japan-China Geometry Conference, 2017 年 9 月 4 日 .

川上裕, 様々な曲面のガウス写像の値分布論的性質について, 研究集会「複素幾何と幾何解析」, 2017 年 3 月 13 日 .

川上裕, 完備極小曲面の研究の最近の進展について, 東大複素解析幾何セミナー, 2016 年 12 月 12 日 .

川上裕, 完備極小曲面のガウス写像の値分布論的性質, 名大幾何学セミナー, 2016 年 11 月 22 日 .

川上裕, 完備極小曲面のガウス写像の値分布論について, 東工大幾何学セミナー, 2016 年 10 月 27 日 .

川上裕, 完備極小曲面のガウス写像の値分布論的性質の幾何学的解釈について, 2016 年度日本数学会秋季総合分科会函数論分科会特別講演, 2016 年 9 月 15 日 .

川上裕, On the Gauss image of complete minimal surfaces in Euclidean 4-space, 内藤博夫退職記念研究集会, 2016 年 3 月 7 日 .

Yu Kawakami, On the Gauss images for various classes of surfaces, Japan-Austria Joint Workshop “Transformations and Singularities”, 2016 年 2 月 20 日 .

川上裕, 曲面のガウス写像の値分布論的性質について, 第 18 回東北複素解析セミナー, 2015 年 6 月 24 日 .

川上裕, ガウス写像の値分布論的性質について, 研究集会「部分多様体と様々な幾何構造」, 2015 年 6 月 22 日 .

[図書](計 1 件)

川上裕, 藤森祥一共著, サイエンス社, 極小曲面論入門 その幾何学的性質を探る, 2019 年, 106 ページ .

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。