様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４８５６

研究課題名（和文）変形量子化と非可換指数関数の幾何学への応用

研究課題名（英文）Application to Geometry of deformation quantization and star exponetials

研究代表者
吉岡　朗（Yoshioka, Akira）

東京理科大学・理学部第二部数学科・教授

研究者番号：４０２００９３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：収束べき級数の変形量子化により得られる代数を用いて研究した。特に非可換あるいは可換指数関数を調べた。2次式の指数関数が特異点をもつことをすでに調べてあるが、特異点を用いて変形量子化代数におけるいくつかの等式を得た。また、変形量子化代数の幾何学、数理物理学への応用を研究した。幾何学的量子化における平行移動の概念と変形量子化代数における接続の概念および平行移動との関係、作用素の固有値問題に対し変形量子化代数による幾何学化、非可換幾何学の数理物理への具体的な応用例を得た。

研究成果の概要（英文）：We consider the algebra obtained by convergent star products. We study star exponentials defined in the algebra which are noncommutative or commutative. We have shown star exponentials of quadratic polynomials have singularities and we obtain several identities in the star product algebras using the singularities.
We also consider applications of star product algebras to geometry and mathematical physics. In star product algebras, transformation of expression is naturally introduced and then one has a flat connection. It is shown that the parallel transport in geometric quantization theory is equivalent to that of star product algebras with respect to the flat connection. We also obtain a geometric point of view of eigenvalue problem for operators via star product algebras and the Maslov quantization condition, and we consider a concrete model to which we can apply noncommutative geometry by star products.

研究分野：Geometry

キーワード：Deformation quantization　star product　star exponentials　convergent star product　noncommutative geometry　quantization

１．研究開始当初の背景

変形量子化(deformation quantization)は，量子力学における「量子化・古典極限」の指導原理を自然な形で理解するため 1970 年代末に数理物理学者により提唱された概念である．変形量子化の存在と分類の問題が，はじめシンプレクティック多様体の場合に解決され，その後，一般のポアソン多様体の場合にも解決されてその数学的な基礎が固まった．現在，場の量子論・弦理論，非可換幾何学などにおいて，多様体上に種々の非可換代数を与えるための基本的なアイデアとして，多くの研究者により研究されている．しかしながら，現在に至るまで, 多くの研究は変形のパラメ－タに関する形式的べき級数の枠内で行われるため，得られる情報が本質的に形式べき級数の代数的な関係にとどまり，幾何学的・解析学的に深い理解を得るためには限界がある．このような状況にあって，大森ー前田－宮崎－吉岡はその全体構想として，変形のパラメ－タに関し収束するべき級数により理論を構成し，幾何学および解析学に対して意義ある情報を引き出す枠組みを目指して研究を行ってきた．特に, その枠組みにおいて初めて扱える対象である非可換指数関数に関して詳しく調べてきた．研究開始当初にわかっていたことは次のようなものである．形式的べき級数ではなく収束するべき級数で考えるために，積が定義される Frechet 空間の族を設定しその性質をしらべた.さらに位相代数の完備性を用いて非可換指数関数を得た．非可換指数関数は, 形式的べき級数による変形量子化ではなく収束する変形量子化において初めて深くとらえることのできる対象である．特に複素２次元ユークリッド空間上の２次の非可換多項式の非可換指数関数の集合は，非可換性のために gerbe の構造を有する.さらに複素対称行列をもちいて変形量子化の族を考える．これらの積はワイル代数の表現の変形を与え，この表現の変形の自由度を用いて種々の関数等式を導いた．２次の非可換多項式の非可換指数関数の集合を用いて有限次元の Lie 群を構成できる. 対応する Lie 群を用いて非可換 Marsden-Weinstein reduction を考えることができる．これを具体的な MIC-Kepler 問題に適用し, 多様体上の収束変形量子化の例を構成した

２. 研究の目的. 本研究では, 変形を形式的ベキ級数ではなく収束べき級数で行い, 変形量子化を位相代数において議論する． 本研究の目的は, 1)変形量子化の代数における指数関数の性質およびその非可換関数等式を調べること．2)変形量子化およびその指数関数の多様体への拡張を研究すること．3)変形量子化の指数関数のもつ関数等式を具体的な量子系, 多様体に応用することである．具体的に述べると１）については，非可換指数関数を用いて，具体的な特殊関数の非可換版を与える．特に非可換性のために生ずる，非可換指数関数の特異点の性質と幾何学的な意味を調べる． これらの非可換特殊関数の満たす関数等式を従来の可換な場合と比較し， 類似性および差異を詳しく調べる．２）は以下である．４次元実ユークリッド空間の余接束のモイアル積から群作用による簡約化を通して非自明な多様体上に収束する変形量子化を構成する．これは非自明な多様体上で得られた収束する変形量子化の例となる．この変形量子化代数の幾何的構造，および解析的性質を詳しく調べる．また，この構成法を複素射影空間に適用し，多様体上の収束変形量子化の例の構成を行う．３）を説明する．変形量子化では，作用素の固有値問題に対応する問題を設定できる．収束する変形量子化においては，非可換指数関数を用いて作用素の固有関数に対応する物が得られ固有値が計算できる．これを複素射影空間上のボホナーラプラシアン， SU(2)-Kepler 問

題などの具体的な系に応用し研究する．非可換１次多項式および２次多項式の非可換指数関数を用いて超幾何関数の変形量子化版を定義し，具体的な多様体，物理系への応用を行う．

３．研究の方法

はじめに，簡約化シンプレクティック多様体上の収束変形量子化の簡約を調べ，さらに複素射影空間など具体的な多様体の場合へ研究を進める．これと関連して応用研究を行う．これらを進めながら，非可換指数関数の性質を研究する．さらに，得られた等式について幾何学的な立場から総合的な考察を行う．そのために,国内外の非可換幾何学・数理物理学・解析学等の研究者と研究打ち合わせおよびセミナー等の情報交換を行う．国内外の学会に参加するとともに，関連する国内外の研究者と協力して，年度ごとに，国内で研究会を一回程度，国外で研究会を一回程度行い，専門分野・隣接分野の研究者とも広く交流し，得られた結果を発表していく．具体的に以下を行った．

簡約化シンプレクテイック多様体上の収束変形量子化については岩井−上野教授の論文"The quantised MIC-Kepler problem and its symmetry group for negative energies",J. Physics A: Math. gen. 21 (19 88), 4083-4108を参照し研究を行った．変形量子化の応用としては，ボホナーラプラシアンについては桑原教授の論文"Spectrum of the Schrodinger operator on a line bundle over complex projective spaces", Tohoku Math. J. 40 (1988), 199-211 を参照した．ブルガリアのMladenov教授と共同でブルガリアのVarnaで国際研究会"Geometry, Integrability and Quantization"を開催し，数学者，物理学者共同の研究討論を行った．イタリア・サレルノ大学のVilasi教授とセミナー・共同研究を行った．ポーランドのBialowieza において行われる国際研究会Workshop on Goemtric Methods in Physicsに参加し結果発表および情報交換をおこなった．この研究会は非可換幾何学，数理物理学者と合同で，現在世界で行われている研究の流れを幾何学という側面から統一的に眺めるものである．主催者のBialystok大学のOdijewizc教授と連絡をとり,情報の収集と研究討論を行った．早稲田大学の本間教授，慶應義塾大学の宮崎教授と共同で研究集会"量子化の幾何学"および研究集会"非可換幾何学と数理物理学"を開催し，国内の関連する研究者を広く招聘し分野横断的に情報の交換，研究討論を行った．また，国内の非可換幾何学，数理物理学，解析学等の研究者との連絡，また，必要に応じて国内外の研究者とセミナーなどによる情報交換を行った．

４．研究成果

（１）変形量子化代数において、作用素の代わりにこれに対応するハミルトン関数に対する固有値問題を考えることができる。関数に対する固有値問題を形式的べき級数ではなく変形のパラメータが数である場合に研究した．具体的な物理模型であるMIC-Kepler問題に対して，変形量子化代数における関数固有値問題の固有値，固有関数，重複度を具体的に求め,非可換指数関数との関係を調べた．さらにマスロフ量子化条件を用いた固有値の計算を行った．

（２）シンプレクティック多様体上の変形量子化を構成するために二つの方法がある．一つは、変形パラメータの次数に関する帰納法を用いる代数的な方法でありもう一つはシンプレクテック多様体上にワイル代数をファイバーとする代数束を考え，切断の作る結合代数の構造を多様体上に引き戻すことにより構成する幾何学的なものである.後者の幾何学的方法について考察した．この場合，さらに切断の代数構造を多様体上に引き戻す方法に二つある．一つは代数束に平坦接続を構成し

平行切断のなす空間と多様体上の関数の空間とが線形同形であることを利用する方法と，多様体上の関数を切断の空間に局所的に埋め込みそれらを大城的に張り合わせてワイル関数代数を得る方法である．この後者の方法はワイル代数を含む量子接触代数を自然に扱うことになり,より広い幾何学的な概念であることを強調し整理発表した．

（3）変形量子化の方法を非可換ゲージ理論に応用し,その具体例として非可換電磁気学を研究した.電磁気学を非可換化するために,通常のラグランジュ密度関数に非可換項をモイヤル積を用いて導入した.この項が宇宙論における非可換ゲージ理論モデルにおよぼす利点として,特にバリオンとレプトンの非対称性に関わる観測データを非可換項の存在よりほぼ十分なオーダーで導けることを示した．

（4）量子化における可換と非可換の意味について示唆的な具体例を掲げた.すなわち力学およびシンプレクテイック幾何学ではいくつかの解ける力学系が知られている.これらはリュービルの意味で完全稜分可能系であり従ってマスロフ理論が適用でき,対応する量子系のエネルギー固有値の近似値が幾何学的に計算可能である.その中でいくつかのものについては,特にラグランジアン多様体を構成しマスロフ量子化条件を具体的に求めることでエネルギー固有値を計算することに成功し,その結果が重複度も含め近似値ではなく正確な値を与えていることを見いだした.さらにマスロフ理論による幾何学的な対象と作用素による非可換な対象の両者の関係を明らかにすることを問題提起した．

（5）非可換指数関数の理論と幾何学的量子化の理論における平行移動の関係を具体的に調べた.ジーゲル半空間上に幾何学的量子化を構成することが可能で,ガウシアンによるコヒーレント束をえる．これに自然に接続が導入され,平行移動が定義される．一方，複素対称行列全体の空間上に変形量子化代数束があり，これらに相互変換作用素を用いることにより自然に接続が導入される．両者の最子的な接続の問の関係を明らかにすることが出来た．

（6）変形量子化の具体的な系への応用として，前年度までの研究において固有値が求まる例を調べた．この計算には系の完全積分可能性が重要であった．最近，可積分系を微分幾何学的に扱うHaantjes テンソルの方法が提唱されている．その応用として正準座標系の構成がある．本年度の研究において，この方法をいくつかの系に適用して正準座標系を構成しこの座標系に基づく変形量子化の足掛かりを得た．変形量子化代数の２次式に対する指数関数を用い特殊関数の対応物をいくつか構成した．さらに１変数の可換変形量子化代数における超幾何関数の対応物の構成を研究しべき級数に変形量子化代数におけるHermite多項式の対応物を代入してKummer関数の量子変形を得た．非可換指数関数は一般に特異点を持つことを明らかにした．指数関数の特異点の周りの級数展開は係数が変形量子化代数の元であるべき級数を与える．本年度の研究において指数関数にたいする留数計算により非可換関数等式が得られることを明らかにした．その応用例として特異点からVirasoro代数を，１変数の変形量子化代数における２次式の指数関数に対する留数の計算としての定式化を整理した．この方法により１変数の変形量子化代数から多変数の非可換変形量子化代数に拡張する足掛かりを得た．
２次元の上半平面における複素構造全体の集合を底空間とする１次元複素線束を考え幾何学的量子化を構成することが行われている．これに対し2生成元の変形量子化代数の指数関数を用いて同等なものを得た．変形量子化代数の指数関数の特異点の性質とその応用が具体例を通して次第に明らかになったといえる．また非可換ゲージ理論において新しい応

用例を得た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Akira Yoshioka, Star exponentials in star product algebra, Trends in Mathematics,査読有,Geometric methods in XXXVI workshop in Physics,2018,掲載予定

② Akira Yoshioka, Star product, Star exponentials and application, Proceedings of the international conference on geometry, integrability and quantization, 査読有, 19, 2018, 234-249 DOI 10.7546/giq-19-2018-234-249

③ Kiyonori Hosokawa, Tsukasa Takeuchi, Akira Yoshioka, Construction of symplectic-Haantjes manifold of certain Hamiltonian systems, Proceedings of the international conference on geometry, integrability and quantization, 査読有, 19, 2018, 140-147 DOI 10.7546/giq-19-2018-140-147

④ Gaetano Lambiase, Gaetano Vilasi, Akira Yoshioka, Cosmological consequences of noncommutative gauge theories, Classical and quantum gravity, 査読有, 34, 2017, DOI 10.1088/1361-6382/aa511e

⑤ Quasi-classical calculation of eigenvalues: examples and questions, Tomoyo Kanazawa, Akira Yoshioka, Trends in Mathematics, 査読有, Geometric methods in Physics, 2016, 69-77, DOI 10.1007/978-3-319-31756-4

⑥ Weyl manifold: a quantized symplectic manifold, Akira Yoshioka, Tomoyo Kanazawa, Proceedings of seventeenth international conference on geometry, integrability and quantization, 査読有, 17, 2016, 392-401, DOI 10.7546/giq-17-2016-392-401

⑦ Star functions; examples and applications, Akira Yoshioka, Tomoyo Kanazawa, Proceedings of sixteenth international conference on geometry, integrability and quantization, 査読有, 16, 2015, 312-326, DOI 10.7546/giq-16-2015-312-326

〔学会発表〕（計 5 件）

① Akira Yoshioka, Star product and star exponential, XXXVI workshop on geometric methods in physics, 2017 July.

② Akira Yoshioka, Star product, star exponential and application, XIX international conference on geometry, integrability and quantization, 2017 June.

③ Akira Yoshioka, 「新しい幾何学に向かって」から「新しい幾何学に向かって−2」まで--無限次元リー群、変形量子化、star 指数関数…, 新しい幾何学に向かって−2, 2016 February.

④ Akira Yoshioka, Quasi-classical calculation of eigenvalues: examples and questions, XXXIV workshop on geometric methods in physics, 2015 July.

⑤ Akira Yoshioka, Weyl manifold, a quantized symplectic manifold, Seventeenth international conference on geometry, integrability and quantization, 2015 June.

〔図書〕（計　4　件）

① Ivailo Mladenov, Akira Yoshioka, Institute of biophysics and biomedical engineering, Bulgarian Academy of Sciences : Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, Proceedings of the Nineteenth International conferece on geometry, integrabily and

quantization XIX,2018, 253.
② Ivailo Mladenov, Guowu Meng, Akira Yoshioka, Institute of biophysics and biomedical engineering, Bulgarian Academy of Sciences : Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, Proceedings of the Eighteenth International conferece on geometry, integrabily and quantization XVIII,2017, 251.
③ Ivailo Mladenov, Guowu Meng, Akira Yoshioka, Institute of biophysics and biomedical engineering, Bulgarian Academy of Sciences : Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, Proceedings of the Seventeenth International conferece on geometry, integrabily and quantization XVII,2016, 406.
④ Ivailo Mladenov, Andrei Ludu, Akira Yoshioka, Institute of biophysics and biomedical engineering, Bulgarian Academy of Sciences : Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, Proceedings of the Sixteenth International conferece on geometry, integrabily and quantization XVI,2015, 326.

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
(1)研究代表者
吉岡　朗　（YOSHIOKA, Akira）
東京理科大学・理学部第二部数学科・教授
研究者番号：40200935

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
前田　吉昭（MAEDA, Yoshiaki）
東北大学・知の創出センター・教授
研究者番号：40101076

宮崎　直哉（MIYAZAKI, Naoya）
慶応義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：50315826

金澤　知世（KANAZAWA, Tomoyo）
東京理科大学・理学部第二部数学科・助教
研究者番号：80713031

(4)研究協力者
竹内 司（TAKEUCHI, Tsukasa）
細川 聖理（HOSOKAWA, Kiyonori）
Gaetano Vilasi (VISLASI, Gaetano)
Gaetano Lambiase (LAMBIASE, Gaetano)