様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　　６ 月 １１ 日現在

機関番号：３７１１５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８６２

研究課題名（和文）離散曲線の変形とその応用

研究課題名（英文）Deformations of discrete curves and their applications

研究代表者
松浦　望（Matsuura, Nozomu）

久留米工業大学・工学部・准教授

研究者番号：００３８９３３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：平面内や空間内の曲線のいくつかの変形に対してその離散モデルを構築した。特に可積分系の観点からは、渦糸の数理モデルとして知られている局所誘導方程式の可積分離散モデルを定式化し、特徴的な厳密解の族を構成した。また非可積分系の観点からは、曲線短縮流のシンプルな離散モデルを提案した。このほか曲線の変形による曲面の構成について調べ、特に離散アフィン球面の構成方法を検討した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
離散的な図形の性質と構成方法を研究した。本研究では例えば曲率に相当するような離散的概念を見出すことを通して離散的図形をコントロールしたため、構成した図形は汎用的な離散化アルゴリズムで生成したものに比べてよい特性を持っている。具体的には特に渦糸の運動に対する可積分離散モデルを作り、特徴的な厳密解の族を構成した。このモデルを雛形のひとつとして今後さらに離散的図形の幾何学が進展することが期待できる。

研究成果の概要（英文）：We constructed discrete models for some deformations of curves in plane and in space. In particular, from the viewpoint of integrable systems, an integrable discrete model of the local induction equation, which is known as a mathematical model of vortex filaments, is formulated to construct a family of characteristic exact solutions. From the viewpoint of non-integrable systems, a simple discrete model of the curve shortening flow is proposed.

研究分野：差分幾何

キーワード：離散曲線　離散曲面　局所誘導方程式　アフィン球面　弾性曲線　曲線短縮流

1. 研究開始当初の背景

微分や積分の技術を用いて曲線や曲面の性質を調べる学問は古くから微分幾何と呼ばれているが, これに対応して, 差分 (引き算のこと) や和分 (足し算のこと) の技術を用いて離散曲線や離散曲面のことを調べたり, そのような離散的図形の構成方法を研究したりする分野を差分幾何という. 英語では discrete differential geometry といい, これに倣って離散微分幾何と呼ぶことも多い. また研究内容を端的に表現して, 離散可積分幾何と言うこともある. 滑らかな曲線や曲面の場合, 図形の形状の情報はすべて曲率と呼ばれる関数が握っており, 曲率を適切にコントロールすることで所望の図形を構成することができる. 図形と曲率の一対一の関係を保証しているのは微分積分学である. ところが離散的な図形は極限操作と相性が悪いため, 微分積分学の上に理論が構築されている従来の微分幾何学においては論外の扱いだった. 対照的に差分幾何は, はじめから積極的に離散的図形を研究対象としており, たとえば曲率に相当するような離散的概念を見出すことを通して, 離散的図形をコントロールする. 差分幾何の考え方で生成される図形は離散的な幾何学の理論に裏打ちされており, 汎用的な離散化アルゴリズムで生成される図形に比べてずっとよい特性を持つ. 研究代表者は前研究課題「離散可積分系の観点による曲線の差分幾何」(基盤 C, 24540103, 2012–2014) において, ユークリッド平面内やユークリッド空間内の曲線についてその差分幾何の枠組みを構築した. その研究で得た知見と技術を基盤にして, 本研究課題では以下に述べるような理論の展開と応用を目指した.

2. 研究の目的

平面内または 3 次元空間内の離散曲線の変形理論を可積分系の観点から構築し, 離散曲面や離散弾性曲線の構成に応用する. またそれらの研究成果を基盤にして, 非可積分系の問題にも取り組む.

3. 研究の方法

本研究では, 離散曲線の離散的変形を考察するとき, 離散可積分系理論によって変形の整合性を保証する. すなわち, 変形の離散化にあたっては汎用的な離散化手法を適用するのではなく, それぞれの場合に応じて個別の工夫をし, 可積分な離散モデルを作ることが本研究の特徴である. そのために必要となるのは, さまざまな幾何のもとでの曲線論, 離散可積分系理論における解の構成理論, 計算機を利用した数式処理などである. 研究目的を達成するため, 以下に述べるとおり関連分野の研究者と討論および共同研究を行った.

4. 研究成果

(1) 局所誘導方程式の離散化と明示公式.　局所誘導方程式は渦糸方程式とも呼ばれ, 渦糸の運動の最小限のエッセンスを抽出した数理モデルとして知られている. 可積分系理論の立場から見れば, 局所誘導方程式は橋本変換を介して非線形シュレディンガー方程式と等価である. 局所誘導方程式の半離散化, すなわち渦糸は離散化するが運動は離散化せず連続なものを考えること, については可積分系理論の視点に立った複数の先行研究があり基本的な結果が知られていたが, 局所誘導方程式の離散化, すなわち渦糸も運動も離散化すること, については可積分な離散モデルを考えるような研究事例自体がほとんどなく, 基本的な性質が満足にわかっていない状態であった. 本研究では廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 太田泰広の各氏との共同研究で以下のような成果を得て, 雑誌論文①および⑥を出版した. (i) 離散局所誘導方程式の導出: 離散非線形シュレディンガー方程式によって可積分性が保障されるような空間離散曲線の離散的運動を定式化した. (ii) 明示公式: 離散非線形シュレディンガー方程式の多重ソリトン解によって記述されるような離散局所誘導方程式の厳密解を, 行列式を用いて構成した. 同じことが半離散局所誘導方程式および局所誘導方程式についてもできる. (iii) もうひとつの離散局所誘導方程式: 局所誘導方程式の離散化としてまた別の差分方程式を導出した (学会発表⑮). この差分方程式の厳密解を構成するにはパフィアンを用いるのが自然で (学会発表⑫), 現在論文を執筆中である. 今後の研究課題としては, 局所誘導階層を離散化することや, ユークリッド空間以外の空間形内で上記 (i) や (ii) と同様のことを考えることが挙げられる.

(2) 平面曲線の等角変形の離散化と明示公式.　平面曲線の可積分な変形では, 長さを保つ変形 (等長変形), 面積を保つ変形 (等積変形), 角度を保つ変形 (等角変形) の 3 つが代表的である. これらの変形はその特徴に応じてそれぞれユークリッド幾何, 等積中心アフィン幾何, 相似幾何の枠組みで考えるのが自然であり, それぞれについて可積分な離散化をすることが可能であることが前研究課題 (基盤 C, 24540103) でわかっている. 特に等角変形については, 平面離散曲線の等角変形が離散バーガース階層によって統制されるが, これを雑誌論文④として出版した. なお曲線の等角変形は対数型美的曲線と関連することがわかっており, 意匠設計への応用が見出されつつある.

(3) ミンコフスキー平面内の曲線の等長変形と明示公式.　ソリトン方程式の代表例のひとつである

modified KdV 方程式はその非線形項の符号によってふたつのタイプに分かれ, ひとつは focusing 型 (以下 mKdV_+ 方程式), もうひとつは defocusing 型 (以下 mKdV_- 方程式) と呼ばれている. これら 2 つの mKdV 方程式は性質を異にし, mKdV_+ 方程式は急減少進行波解 (ソリトン解) を持つが, mKdV_- 方程式は急減少進行波解を持たず, その代わりにまた違ったタイプの進行波解 (キンク解) を持つ. 曲線の可積分幾何の観点からは, mKdV_+ 方程式は例えばユークリッド平面内の曲線の等長変形を記述する. 井ノ口順一, 梶原健司, 丸野健一, 太田泰広, 朴炯基の各氏との共同研究で次の成果を得て, 雑誌論文②を出版した. (i) ミンコフスキー平面内の空間的曲線の等長変形は mKdV_- 方程式によって記述され, (ii) これをミウラ変換すると等積中心アフィン平面内の曲線の等積変形が誘導される. (iii) これら 2 つの変形はそれぞれ行列式を用いて明示的に解を構成することができる.

(4) 中心アフィン幾何における平面曲線の変形.　等積中心アフィン幾何における平面曲線の変形では KdV 方程式を用いた等積変形が代表的だが, 一方で, 中心アフィン幾何における平面曲線の変形では mKdV_- 方程式を用いた変形が自然に登場する. 梶原健司, 黒瀬俊, 朴炯基の各氏との共同研究でこれらの変形を定式化し, さらに両変形を結ぶミウラ変換を導出した. その帰結として KdV 方程式による等積変形の明示公式が得られ, 雑誌論文③を出版した.

(5) 離散アフィン球面の表現公式.　アフィン球面には固有なものと非固有なものがあり, これらはそれぞれユークリッド幾何学における通常の球面および平面のアフィン微分幾何学的な類似物として知られているが, 可積分系の観点からはそれぞれツィツェイカ方程式およびリウヴィル方程式で記述されるような曲面である. 小林真平氏との共同研究で次の成果を得た. まず, アフィン計量が不定値であるようなアフィン球面に対して, ループ群の分解理論を援用して表現公式を導出した. さらにそのことを離散化し, 離散アフィン球面の表現公式を得た. 特に非固有の場合は, 平面離散曲線のペアから離散非固有アフィン球面が構成され, この表現公式を用いて特異点の観点から興味深いと思われるようないくつかの例を構成した. 以上の内容をまとめた論文 Representation formula for discrete indefinite affine spheres を雑誌に投稿中である.

(6) 離散曲線の変形による離散アフィン球面の構成公式.　空間離散曲線の離散的変形として離散不定値アフィン球面が構成できることを示した. 今後は, 明示公式の導出, すなわち離散ツィツェイカ方程式の多重ソリトン解を用いて離散不定値アフィン球面の位置ベクトル成分をすべて明示的に書き下すこと, が研究課題となる.

(7) 平面離散弾性曲線の数値的構成.　弾性曲線は局所誘導方程式のもとで形状を変えない空間曲線として理解することができ, これを利用して速さ 1 の弾性曲線を離散化すると, 頂点間の距離が一定の離散弾性曲線が定義できることが知られている. とくに離散弾性曲線が平面内に収まる場合は, その離散曲率がみたす常差分方程式の解が楕円テータ関数によって表示でき, 平面離散弾性曲線が数値的に構成できることがわかった. これに関する記事が数理科学 674 (サイエンス社, 2019) に掲載予定である. 今後の研究課題としては, 平面離散弾性曲線の座標成分を明示的に楕円テータ関数で書き下すことや, 空間離散弾性曲線の明示公式の導出, あるいは離散弾性曲線を離散弾性棒へ拡張することやその明示公式, およびそれらの変形問題を弾性体の制御へ応用することなどが考えられる.

(8) 曲線短縮流の離散化.　上記 (1)–(7) の研究では曲線の可積分な変形を調べたが, 平面曲線の非可積分な変形として知られている曲線短縮流の離散化にも取り組んだ. 曲線短縮流は平面曲線の時間発展で, その法線速度が曲率であるため平均曲率流の 1 次元版として知られており, 可積分系と非可積分系の中間地点に位置するような偏微分方程式である. 曲線短縮流の初期値問題を数値的に解く際には, 数値的不安定現象を回避するためにいろいろな非自明な接線速度を導入することが推奨されている. 本研究では従来の数値スキームに比べてシンプルな離散的接線速度を提案し, 曲線短縮流の数値シミュレーションを行った. 現在, 収束の議論などについて研究を継続中である.

(9) その他.　非専門家向けに曲線と曲面の差分幾何を概説した論文⑤を出版した. これは同じ題名のレビュー論文 (日本応用数理学会論文誌第 23 巻第 1 号 (2013), pp. 55–107) の続編である. また, 科研費や福岡市からの助成金の補助のもとに, 第 13 回差分方程式の対称性と可積分性に関する国際会議 (SIDE13) を JR 博多シティ会議室で開催した. これは 1994 年に始まった隔年開催の国際会議で, 今回は 20 ヶ国から 142 名の参加者があり, 5 日間にわたって 98 件の研究発表 (口頭発表 51 件とポスター発表 47 件) があった. 今後の研究の方向性を議論するなど, 活発な研究活動が行われた.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Sampei Hirose, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta,

Discrete local induction equation, to appear in Journal of Integrable Systems. 査読有. DOI: 10.1093/integr/xyz003

② Hyeongki Park, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Ken-ichi Maruno, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, *Isoperimetric deformations of curves on the Minkowski plane*, to appear in International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 査読有. DOI: 10.1142/S0219887819501007

③ Hyeongki Park, Kenji Kajiwara, Takashi Kurose and Nozomu Matsuura, *Defocusing mKdV flow on centroaffine plane curves*, JSIAM Letters 10 (2018), pp. 25–28. 査読有. DOI: 10.14495/jsiaml.10.25

④ Kenji Kajiwara, Toshinobu Kuroda and Nozomu Matsuura, *Isogonal deformation of discrete plane curves and discrete Burgers hierarchy*, Pacific Journal of Mathematics for Industry (2016) 8:3 (14pp). 査読有. DOI: 10.1186/s40736-016-0022-z

⑤ 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 応用数理第 26 巻第 3 号 (2016), pp. 17–24. 査読有. DOI: 10.11540/bjsiam.26.3_17

⑥ Sampei Hirose, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, *dNLS Flow on Discrete Space Curves*, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, Mathematics for Industry 24 (2016), Springer Japan, pp. 137–149. 査読有. DOI: 10.1007/978-981-10-1076-7_14

〔学会発表〕（計 20 件）

① 松浦望, 曲線短縮方程式の離散化, 九州可積分系セミナー (九州大学), 2018 年 12 月

② 松浦望, 曲線短縮方程式の離散化, 幾何学のスペクトル (北海道大学), 2018 年 12 月

③ 朴炯基, 梶原健司, 松浦望, Lotka-Volterra flow on discrete centroaffine plane curves, 日本応用数理学会 2018 年度年会 (名古屋大学), 2018 年 9 月

④ 黒瀬俊, 松浦望, ミンコフスキ平面上および 2 次元ド・ジッター空間上の曲線から等積中心アフィン平面曲線へのある変換, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会 (山形大学), 2017 年 9 月

⑤ 梶原健司, 黒瀬俊, 松浦望, 朴炯基, Explicit formula for mKdV flow on centroaffine plane curves, 日本応用数理学会 2017 年度年会 (武蔵野大学), 2017 年 9 月

⑥ 松浦望, 離散非固有アフィン球面の表現公式, 九州可積分系セミナー (九州大学), 2017 年 6 月

⑦ Shimpei Kobayashi and Nozomu Matsuura, A construction method for discrete indefinite affine spheres, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory (University of Georgia), March 2017

⑧ Sampei Hirose, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, dNLS flow on discrete space curves, 会議の名称等は⑦に同じ

⑨ 梶原健司, 丸野健一, 松浦望, 中西和音, 朴炯基, Explicit formulas for area-preserving deformations of plane curves in the equicentroaffine geometry, 日本応用数理学会第 13 回研究部会連合発表会 (電気通信大学), 2017 年 3 月

⑩ 松浦望, 平面曲線の等積変形に対する明示公式, 福岡大学微分幾何セミナー, 2016 年 11 月

⑪ 松浦望, 等積幾何における平面離散曲線の変形, 意匠設計のための微分幾何学・離散微分幾何 (九州大学), 2016 年 9 月

⑫ 廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 松浦望, 太田泰広, 離散空間曲線の運動に対する行列式解と Pfaffian 解, 日本数学会 2016 年度年会 (筑波大学), 2016 年 3 月

⑬ 廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 松浦望, 太田泰広, 渦糸方程式の離散化, 日本数学会 2016 年度年会 (筑波大学), 2016 年 3 月

⑭ 廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 松浦望, 太田泰広, 空間離散曲線の等距離等周変形 II: 渦糸方程式の離散化との関係, 第 12 回日本応用数理学会研究部会連合発表会 (神戸学院大学), 2016 年 3 月

⑮ 廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 松浦望, 太田泰広, 空間離散曲線の等距離等周変形 I: lattice Landau-Lifschitz 方程式による変形, 学会名等は⑭に同じ

⑯ Nozomu Matsuura, Integrable discrete models of vortex filaments, Transformations and Singularities (Tokyo Institute of Technology), 2016 年 2 月

⑰ 松浦望, 渦糸方程式の離散化, 測地線及び関連する諸問題 2016 (熊本大学), 2016 年 1 月

⑱ 廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 松浦望, 太田泰広, 渦糸方程式の離散化, 可積分系が拓く現象数理モデル (明治大学先端数理科学インスティテュート), 2015 年 11 月

⑲ 中西和音, 梶原健司, 松浦望, 中心アフィン幾何における平面曲線の等積変形とその明示公式, 日本応用数理学会 2015 年度年会 (金沢大学), 2015 年 9 月

⑳ 廣瀬三平, 井ノ口順一, 梶原健司, 松浦望, 太田泰広, 渦糸方程式の離散化, 学会名等は⑲に同じ