

平成 30 年 5 月 15 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04875

研究課題名(和文) 擬アノソフ写像のダイナミクスと三次元ファイバー多様体のトポロジー

研究課題名(英文) Dynamics of pseudo-Anosov maps and topology of fibered 3-manifolds

研究代表者

金 英子 (Kin, Eiko)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80378554

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：擬アノソフ写像類の曲線複体に関する漸近的移動距離(たんに移動距離という)の研究を行い、1次元ベッチ数が2以上の3次元双曲ファイバー多様体と擬アノソフモノドロミーの移動距離を関連付けた。応用として、種数 g の楕円の写像類群の最小移動距離が $1/g$ の振る舞いをすることを示した。

正規エントロピーが P 以下の、擬アノソフ組みひもの無限列の新しい構成方法を与えた。応用として種数 g のスピンの写像類群の最小エントロピーが $1/g$ の振る舞いをすることを示した。さらに skew-palindromic というある対称性を持つ n 次組みひもの最小エントロピーが $1/n$ の振る舞いをすることを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied two invariants of pseudo-Anosov elements in the mapping class group. One is the entropy which is the translation length of the pseudo-Anosov element on the Teichmüller space. The other is the asymptotic translation length of the pseudo-Anosov element on the curve complex. We proved that the minimal asymptotic translation length among pseudo-Anosov elements in the hyperelliptic mapping class group of genus g behaves like $1/g$ (Joint with H. Shin)

We gave a new construction of sequences of pseudo-Anosov braids with small normalized entropies. As an application, we proved that the minimal entropy among pseudo-Anosov elements in the spin mapping class group of genus g behaves like $1/g$. Moreover the minimal entropy among pseudo-Anosov skew-palindromic braids with n strands behaves like $1/n$. (Joint with S. Hirose)

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 3次元双曲多様体 擬アノソフ 位相的エントロピー 曲線複体 群の不変順序 モノドロミー 双曲体積

1. 研究開始当初の背景

(1) 曲面の写像類群の元、すなわち写像類で最も一般的なものは擬アノソフである。写像類群の曲線複体やタイヒミュラー空間への作用を考察することで、擬アノソフ写像類全体のダイナミクスに関する特徴的な性質が取り出せることが期待できる。写像類のタイヒミュラー空間への作用の移動距離はエントロピーとよばれ、この数は擬アノソフの複雑さを反映する。エントロピーを曲面のオイラー数で正規化した正規エントロピーは、3次元多様体論の観点からも、擬アノソフの不変量として重要である。一方、擬アノソフ写像類の曲線複体への漸近的移動距離(以下、簡単のため移動距離という)も擬アノソフの複雑さを反映する。種数 g の閉曲面の擬アノソフ写像類の二つの不変量、エントロピーと移動距離については、ある不等式が成立することを Gadre et. al (2013) は示していた。この不等式は g に関して漸近的に最良の不等式であった。一方、正規エントロピーがある定数以下の擬アノソフ全体に制限した場合は、Gadre らの不等式の精密化が期待できると報告者は予想していた。この予想は、正規エントロピーが小さい擬アノソフの例を使った実験に基づいていた。ここでの実験、試行錯誤が研究成果の(1)に繋がった。

(2) 曲面 S の位相型を固定するとき、 S 上の擬アノソフ全体におけるエントロピーの最小値、移動距離の最小値が存在する。(同じ擬アノソフ写像類が、これら2つの最小値を実現するとは限らない) 最小値を決定せよという問題は自然だが、この問題は相当難しい。そのため、研究開始当初は曲面の適当な無限族に対して、これらの最小値の漸近挙動を調べる動向が海外であった。最小エントロピーの研究では、適当な部分群の無限列に対して最小値の漸近挙動を調べる研究動向があったが、同じことを移動距離について調べる研究動向は当時、まだなかった。

2. 研究の目的

向き付け可能曲面の写像類群を考察する。写像類から写像トーラスとよばれる3次元ファイバー多様体が得られる。本研究目的は、擬アノソフ写像類のダイナミクス(e.g. エントロピーや、曲線複体に関する移動距離)と写像トーラスのトポロジーと幾何(e.g. ファイバーの位相型とその多様性、写像トーラスの双曲体積)を関連させ、擬アノソフの幾つかの不変量についての新しい関係、現象、問題を見出すことであった。

3. 研究の方法

報告者はこれまでの研究において、(曲面のタイプによらず)正規エントロピーが小さい擬アノソフは、マジック多様体とよばれる3つのカスプを持つような、あるファイバー双曲多様体のモノドロミーであることを

示していた(高沢光彦氏との共同研究)。実際、最小エントロピーが既に決定されている場合については、その最小値を与える擬アノソフはマジック多様体のモノドロミーとして表されることもわかっていた。報告者は、本研究課題を開始する以前に、マジック多様体の全てのファイブレーションのモノドロミー、それに付随する train track map を具体的に記述していた。マジック多様体に特化した結果であるが、ここで得た知見、技術を使うと、ある条件を持つ大量の双曲絡み目の補空間のモノドロミーを具体的に記述することができる。例えばマジック多様体の“親”である、ねじれ5鎖絡み目の補空間などが扱える例である。ファイバー多様体のモノドロミーを具体的に記述してみることによって、正規エントロピーが小さい擬アノソフのダイナミクスの理解が深まり、擬アノソフの不変量の観点から興味深い擬アノソフの例を大量に構成した。ここでの考察が研究成果(1)(2)(3)を生んだ。共同研究者の廣瀬進とは、研究期間中、研究打ち合わせを年に数回、Shin, Rolfsen とは共著論文を発表するまでに年に1, 2回の研究打ち合わせを行った。

4. 研究成果

(1) 1次元ベッチ数が2以上の任意の3次元双曲的ファイバー多様体 M に対して、 M のファイバーの擬アノソフモノドロミーの無限列で曲線複体への移動距離がいくらでも小さくなるものが存在することを示した。その応用として、種数 g の楕円の写像類群の最小移動距離が $1/g^2$ の振る舞いをする、種数 g のハンドル体群の最小移動距離が $1/g^2$ の振る舞いをするを示した。また種数1、穴の個数が n 個の写像類群の最小移動距離は $1/n^2$ であることも、主結果の応用として示した。3次元ファイバー多様体と擬アノソフモノドロミーの移動距離を関連付けた研究はこれまでになされておらず、国内外の研究者にインパクトを与えたことと思う。(H. Shin との共同研究)

(2) 境界付き3次元多様体とする。 M の基本群は左不変順序群であるが、両側不変な順序を許容するとは限らない。 M が双曲3次元多様体の場合は、基本群のある有限指数部分群が、両側不変順序群になることが知られている。そこで、報告者は3次元多様体 M の基本群が両側不変順序群になるのはどのような M か? という問題を考察し、基本群が両側不変順序群であるような3次元双曲多様体を組織的に構成した。(D. Rolfsen との共同研究)

(3) 研究開始当初の背景の(2)に問題について、種数0の曲面に制限した場合にこの問題を解く一般的なアプローチを与えた。ある穏やかな条件の下では、正規エントロピー

が P 以下の種数 0 の曲面の擬アノソフ写像類のダイナミクスを記述した. 応用として正規エントロピーが P 以下の, 種数 0 の曲面上の擬アノソフ写像類の新しい構成方法を与えた. これを用いて種数 g のスピン写像類群の最小エントロピーが $1/g$ の振る舞いをすることを示した. もう一つの応用として, ある対称性を持つ n 次組みひも (skew-palindromic braid) の最小エントロピーは $1/n$ の振る舞いをすることを示した. 一方, これと類似の対称性を持つ palindromic な n 次組みひもについては, エントロピーは下から一樣にある定数で抑えられることもわかった. ここで得た研究成果を含んだプレプリント "A construction of pseudo-Anosov braids with small normalized entropies" (2018) を完成させた. (廣瀬 進との共同研究)

(4) 粘性の高い液体を均一に効率よくかき混ぜる問題は古くから研究されており, 工学的に重要であることはいうまでもない. Boyland et al (文献 1) は, 擬アノソフ組みひもを用いたかき混ぜ方を発表し, この方法を用いると均一なミキシング(かき混ぜ)が達成されていることを実験で示した. Boyland et al の仕事は流体のミキシングの研究に擬アノソフ組みひもが重要な役割を担うことを指摘したもので画期的であった. その後, 擬アノソフ組みひもを用いてミキシングをデザインする研究が国内外で行われるようになった(文献 2). キャンデーをかき混ぜる機械(taffy puller)は, 擬アノソフの理論が背後にある(文献 3). 報告者は, 文献(3)を受けて, 主流な taffy puller に現れる幾つかの擬アノソフ組みひもと, 体積が非常に小さいカスプ付き三次元双曲多様体の間の関係を見つけた. 現在残っている taffy puller の一つに付随する組みひもは, 3次 pure braid であるが, これは3次の pure braid 全体で最もエントロピーが小さい組みひもである. 報告者は, 擬アノソフ写像のダイナミクスと三次元ファイバー多様体のトポロジーに関する解説記事を執筆予定であるが, ここで得た結果を記事に含める予定である.

<引用文献>

P. Boyland, H. Aref and M. Stremler, Topological fluid mechanics of stirring, J. Fluid Mech. 403, 277-304 (2000).

金 英子, 坂上貴之, Efficient topological chaos embedded in the blinking vortex system, Chaos 15 (2005).

J.L. Thiffeault, The mathematics of taffy pullers, Mathematical Intelligencer 40 (1), 26-35 (2018).

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

金 英子, Hyunshik Shin, 査読有, Small asymptotic translation lengths of pseudo-Anosov maps on the curve complex, GROUPS, GEOMETRY, AND DYNAMICS に掲載決定.

金 英子, Dale Rolfsen, 査読有, Braids, orderings and minimal volume cusped hyperbolic 3-manifolds, GROUPS, GEOMETRY, AND DYNAMICS に掲載決定.

金 英子, 廣瀬 進, 査読有, The asymptotic behavior of the minimal pseudo-Anosov dilatations in the hyperelliptic handlebody groups, Quarterly Journal of Mathematics 68 (2017) 1035-1069.

[学会発表](計8件)

金 英子, Small dilatation pseudo-Anosov braids and disk twists, 微分トポロジー18, 筑波大学, 東京, 2018年3月.

金 英子, Braids, orderings and minimal volume cusped hyperbolic 3-manifolds, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics, 東京大学, 東京, 2017年2月.

金 英子, Small asymptotic translation lengths of pseudo-Anosov maps on the curve complex, Mini-workshop "Growth 4", 早稲田大学, 東京, 2017年4月.

金 英子, Small asymptotic translation lengths of pseudo-Anosov maps on the curve complex, Low dimensional topology and number theory IX, 福岡, 2017年3月.

金 英子, Symmetric braids arising from monodromies of branched virtual fibrations of closed 3-manifolds, トポロジー-幾何セミナー, 広島大学, 2017年11月.

金 英子, Braids and hyperbolic 3-manifolds from simple mixing devices, トポロジー-火曜セミナー, 東京大学, 東京, 2017年6月.

金 英子, Braids and topological mixing, 理研セミナー, 東京, 2017年6月.

金 英子, Braids, orderings and minimal

volume cusped hyperbolic 3-manifolds,
KAIST topology seminar, Korea, 2016年8
月.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kin/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

金 英子 (KIN, Eiko)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号: 80378554

(2)研究分担者 なし.

(3)連携研究者 なし.

(4)研究協力者 なし.