様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月　 6 日現在

機関番号：15301
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：15K04876

研究課題名（和文）旗多様体の一般コホモロジーおよびシューア関数とその変種に関する研究

研究課題名（英文）Research on generalized cohomology of flag varieties and Schur functions and their variants

研究代表者

中川　征樹（Nakagawa, Masaki）

岡山大学・教育学研究科・准教授

研究者番号：50370036

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：PragaczによるHall-Littlewood多項式に対するGysinの公式を，複素向き付け可能な一般コホモロジー論へ拡張することに取り組み，普遍Hall-Littlewood関数を導入して，これに対する普遍Gysinの公式を確立した．また，通常コホモロジーにおけるDarondeau-Pragaczの公式を，複素コボルディズムへ拡張することにも取り組み，A型の旗束の場合に彼らの公式を拡張した．一連の研究の中で普遍階乗的Hall-Littlewood P，Q-関数を導入し， 拡張されたDarondeau-Pragaczの公式の副産物として，これらの母関数表示を求めた．

研究成果の概要（英文）：We studied a generalization of the Gysin formulas for the Hall-Littlewood polynomials due to Pragacz to the complex-oriented generalized cohomology theory. We introduced the universal Hall-Littlewood functions, and established the universal Gysin formulas for them. We also studied a generalization of the Darondeau-Pragacz formulas in the ordinary cohomology theory to the complex cobordism theory, and extended their formulas in the case of type A flag bundles. In the course of our study, we introduced the universal factorial Hall-Littlewood P- and Q-functions, and were able to obtain the generating functions for them as a by-product of our formulas.

研究分野： 数学，幾何学，トポロジー

キーワード： トポロジー　旗多様体　一般コホモロジー　Schur関数　Hall-Littlewood関数　Gysin写像　複素コボルディズム　シューベルト・カルキュラス

１．研究開始当初の背景

古典的なシューベルト・カルキュラスは，しばしば標語的に「Grassmann 多様体の Schubert 類は Schur 関数により代表される」と表現される．この言葉は，Grassmann 多様体や(コホモロジー)Schubert 類という幾何的・トポロジー的な研究対象と，Schur 関数という代数的・組合せ論的な研究対象を結び付け，幾何学・トポロジーと代数学・組合せ論の相互作用により，これらの構造をより深く解明するという，その後のシューベルト・カルキュラスの方向性を端的に表していると考えられる．この事実を雛形として，現代的なシューベルト・カルキュラスは，1980 年代以降，大きく分けて次の二つの方向へ拡張・一般化されてきた:

(1)複素 Grassmann 多様体(Lie 群の等質多様体と見る場合，A 型)を，他の等質多様体である Lagrangian Grassmann 多様体(C 型)や直交 Grassmann 多様体(B，D 型)，完全旗多様体(A，B，C，D，E，F，G 型)，さらには無限次元 Kac-Moody 群の等質空間やアフィン Grassmann 多様体などに置き換える．

(2) 通常の整数係数コホモロジー理論(常コホモロジー理論)を，K-理論や複素コボルディズム理論，代数的コボルディズム理論，BP-理論，より一般の(複素向き付け可能な)一般コホモロジー理論，さらには，それらのトーラス同変版などに置き換える．

(1)の一般化により，複素 Grassmann 多様体のコホモロジーにおいて Schur (S-)関数が果たした役割を，Lagrangian Grassmann 多様体の場合には Schur Q-関数が，直交 Grassmann 多様体の場合には Schur P-関数が，完全旗多様体の場合には Schubert 多項式が，それぞれ担う (Lascoux-Schutzenberger (1982 年)，Pragacz (1991 年))．また，考える群を無限次元の Kac-Moody 群や Lie 群上のループ群などに拡張することにより，Lie 群上の基点付きループ空間なども(無限次元の)等質空間と見なすことが可能となり(いわゆるアフィン Grassmann 多様体)，その上でシューベルト・カルキュラスを展開することができる(アフィン・シューベルト・カルキュラス)．この文脈では，例えば特殊ユニタリー群に対するアフィン Grassmann 多様体の(ホモロジー) Schubert 類は「k-Schur 関数」により代表されることが Lam により示されている (2008 年)．

次に，(2)の一般化によると，例えば複素 Grassmann 多様体の K-理論の場合，その Schubert 類を表す多項式として Grothendieck 多項式がとれ，Lagrangian Grassmann 多様体および直交 Grassmann 多様体の場合には「K-理論的 Schur Q-および P-関数」がとれるなど，さらに新しい対称関数の族が登場する(Lascoux (1990 年)，池田-成瀬(2013 年))．また，トーラス同変コホモロジー理論を考えると，固定点集合への制限写像(局所化写像)により，旗多様体のトーラス同変コホモロジー環を多項式環の直和の部分環として組合せ論的に記述できることが知られている(いわゆる GKM 理論)．この文脈では，通常の Schur S，P，Q-関数にパラメーターを付けた「階乗的 Schur S，P，Q-関数」などが現れる(Knutson-Tao(2003 年)，池田-成瀬(2009 年，2013 年))．

このように，考える空間やコホモロジー理論を様々に取り換えることにより，Schur 関数の様々な変種や，それらを含むより大きな特殊多項式・関数の族が見出されてきた．この方向性に沿って，研究代表者である中川は，研究分担者である成瀬弘氏との共同研究の中で，古典的な Schur 多項式について知られている種々の結果が，常コホモロジー理論(これは加法的形式群に対応する)に対応するものであるという視点に立ち，これをより一般の「複素向け付け可能な一般コホモロジー理論」，取り分け「普遍性」をもつ複素コボルディズム理論(これは普遍形式群に対応する)へ拡張することを試み，通常の Schur S，P，Q-関数の「普遍版」である「普遍(階乗的)Schur S，P，Q-関数」を導入して，これらを用いて，無限シンプレクティック群や無限特殊直交群上のループ空間の，複素向き付け可能な一般(コ)ホモロジーの記述を与えた．

２．研究の目的

項目１．で述べたように，一連の研究を推し進める上での指導原理は，無限次元の場合も含んだ広い意味での「旗多様体」の，K-理論や複素コボルディズム理論といった「一般コホモロジー理論」における「Schubert 類」と呼ばれる幾何的・トポロジー的な対象と，Schur S，P，Q-関数に代表される「対称関数とその変種」という代数的・組合せ論的な対象との間に美しい対応関係があるはずである，と言える．このように幾何と代数との対応を通して，これらを融合させることにより，現代幾何学において最も重要な研究対象の一つである旗多様体がもつ，コホモロジーなど諸々の幾何的・トポロジー的な構造を，対称関数を軸とした代数的・組合せ論的構造を通して，より深く理解することが可能となると考えられ，それが本研究の大きな目的である．

３．研究の方法

(1) 古典群に対するアフィン Grassmann 多様の K-理論 (K-ホモロジー)の研究

複素 Lie 群に対応するアフィン Grassmann 多様体は，Lie 群上の基点付きループ空間とホモトピー同値になることが知られており(Garland-Raghunathan (1974 年), Quillen (未発表))，そのホモロジーは，Schubert 類を基底とする自由加群であり，同時に積(Pontrjagin 積)に関して，可換な Hopf 代数の構造をもつ． したがって，Schubert 類の間の Pontrjagin 積に関する積構造を調べ，構造定数を決定することが重要な問題となる(アフィン・シューベルト・カルキュラス)．これに関しては，近年，組合せ論の観点から精力的に研究が進められ，A 型については，常ホモロジー理論や K-ホモロジー理論の場合に，対称関数環との同一視および Schubert 類を表す対称関数の同定などが行われている(Lam (2008 年), Lam- Schilling -Shimozono (2010 年), Lam-Pylyavskyy (2007 年))．

これら一連の研究においては，まずアフィン Grassmann 多様体のホモロジー環を決定することが先決であるが，これについては，Bott の研究(1958 年)以降，Lie 群上のループ空間のホモロジーの計算という形で，主にトポロジストにより研究が進められてきた．基本的な手法は，Bott による生成多様体，および種々のファイブレーションに付随する，種々のスペクトル系列の計算を利用するものである．研究代表者である中川は，これらの手法を利用してループ空間の研究を行い，シンプレクティックおよび特殊直交群のループ空間の K-ホモロジーの構造から，池田-成瀬による K-理論的 Schur Q-および P-関数の双対にあたる対称関数(の特殊な場合)を見出した(2010 年)．一方，Kostant -Kumar による「nil-Hecke 代数」を利用した組合せ論的手法を駆使することにより，Lam (2008 年)は，A 型のアフィン Grassmann 多様体のホモロジーSchubert 類と「k-Schur 関数」との同一視を与えた．同じく組合せ論的手法を用いて，シンプレクティック群や K-ホモロジーの場合にも精力的に研究が進められている(Lam-Pylyavskyy (2007 年), Lam -Shilling-Shimozono (2010 年))．

本研究では，まだ十分に考察されていないシンプレクティックおよび特殊直交群に対応するアフィン Grassmann 多様体の K-ホモロジーに焦点を絞って，上述したように，トポロジーと組合せ論双方の手法を利用して，研究を進めていく．具体的には，これまでの研究で得られた「双対普遍 Schur P, Q-関数」の特殊化から構成された対称関数(双対 K-理論的 Schur P, Q-関数)と，成瀬氏により Young 盤 (逆平面分割)を利用して組合せ論的に構成された多項式との一致を証明し，シンプレクティックおよび特殊直交群に対応するアフィン Grassmann 多様体の K-ホモロジーの記述を完成させる．

(2) Gysin 写像を利用した普遍 Schur 関数の研究

複素向き付け可能で，乗法的な一般コホモロジー理論を考える．空間の間の射に対して，然るべき条件の下で，コホモロジーの間の通常の準同型とは逆向きの写像である「Gysin 写像(Gysin 準同型，押し出し(push-forward)，ファイバーに沿う積分(integration along the fiber)，移送準同型(transfer))」が定義される．これにより，部分多様体やサイクルの交叉といった，幾何的で複雑な対象を，対応するコホモロジー類の積という，代数的で扱いやすい対象に転換して考察することができ，いわゆる射影公式と相俟って，大変有用なものとなる．シューベルト・カルキュラスとの関連では，複素ベクトル束に付随する完全旗束の射影から誘導される常コホモロジー(もしくは Chow 環)の Gysin 写像を利用して Schur 多項式を与える公式が，Pragacz 等により 1980 年代には知られていた．これは完全旗束の射影から誘導される Gysin 写像が，いわゆる「Jacobi の対称化作用素」になっていることの帰結である．一方，トポロジーにおいては，1969 年に Quillen が，ベクトル束に付随する射影空間束の場合に複素コボルディズム理論の Gysin 準同型の，「residue symbol」を用いた記述を与えている．この結果から普遍 Schur 関数を，Gysin 写像を通して記述できることがわかり，これをより一般の旗束や Schur 多項式の拡張である Hall-Littlewood 多項式へと拡張する問題が考えられる． このように，古典的な Schur 多項式や Hall-Littlewood 多項式を，旗束の射影から誘導される常コホモロジー理論(加法的形式群の場合)の Gysin 写像を通して捉えるという幾何的・トポロジー的な視点を持つことで，これを他の一般コホモロジー理論(と対応する形式群)へ拡張するという視点が自然に生まれ，Schur 多項式にまつわる古典的な結果の「正しい」一般化が可能になると考えられる．

4．研究成果

(1) 普遍 Hall-Littlewood 関数に対する普遍 Gysin の公式

Pragacz は Schur 多項式の拡張である Hall-Littlewood多項式に対しても，旗束の射影から誘導される常コホモロジー理論の Gysin写像を用いた特徴付けを与えた(2015年)．我々は，こうした常コホモロジー理論に

における通常のSchur S，P，Q-関数の「Gysinの公式」を，複素向き付け可能な一般コホモロジー理論の中で普遍性をもつ複素コボルディズム理論において確立することに取り組み，これまでの研究の中で導入した「普遍Schur S,P,Q-関数」を含んだ「普遍Hall-Littlewood関数」を定義して，それに対する「普遍Gysinの公式」を確立した．これらの成果は研究集会「第62回 トポロジーシンポジウム」(2015年8月，於 名古屋工業大学)等において発表され，論文Nakagawa-Naruse「Universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions」(Contemporary Mathematics, Vol. 708, 2018, pp.201 − 244; arXiv: 1604.00451)として発表された．

(2) 複素コボルディズム理論における Darondeau-Pragacz の公式とその応用

上記(1)の研究を進めている過程で，Hudson-Matsumura による，代数的コボルディズム理論におけるSegre類およびSchubert多様体の「Kempf-Laksov 分解」から定義される「Kempf-Laksov 類」の研究，Darondeau-Pragacz による旗束(A，B，C，D 型)に付随する Gysin の公式の研究が登場した．我々の「普遍 Gysin の公式」の観点からは，これらを複素コボルディズム理論へ拡張することができる．具体的には，まず，A 型の旗束の場合に，Darondeau-Pragacz の公式を，複素コボルディズム理論へ拡張することができた．また， Kempf-Laksov 類を表す対称関数としての「Kempf-Laksov 型の普遍階乗的 Schur 関数」の導入，さらには，これまでに導入した様々な「普遍 Schur S，P，Q-関数」を，その特殊な場合として含む「普遍(階乗的) Hall-Littlewood P，Q-関数」の導入を行った．また，複素コボルディズム理論における Darondeau-Pragacz の公式の副産物として，普遍 Hall- Littlewood P，Q-関数の母関数表示を求めることができた．これは，古典的な Schur 多項式の場合でさえ，ほとんど知られていなかったものであり，これにより，Schur (S-)多項式の Jacobi-Trudi の公式や Schur Q-多項式の Pfaffian 公式，およびそれらの「K 理論版」を統一的な方法で求めることができる.これらの成果は，研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」(2016 年 8 月 於 信州大学)等において発表され，論文「Generating functions for the universal Hall-Littlewood P- and Q-functions」(arXiv:1705.04791)として発表された．さらには，B，C，D 型の旗束の場合にも Darondeau-Pragacz の公式を複素コボルディズム理論へ拡張することができ，結果を論文「Darondeau-Pragacz formulas of types B，C，D in complex cobordism」としてまとめている最中である．

(3) 双対 K-理論的 Schur P，Q-関数の研究

これまでの研究の中で導入した「双対 K-理論的 Schur P，Q-関数」を用いて，無限シンプレクティック群および無限特殊直交群に対応するアフィン Grassmann 多様体の K-ホモロジー環の記述が得られ，これより，有限次シンプレクティック群および特殊直交群の場合の K-ホモロジー環の記述が得られている．これと Clarke によるループ空間のK-ホモロジー環の計算結果(Bottによる生成多様体を利用する)とが一致することを確認した．また，研究分担者である成瀬氏により，「K-理論的 Hall-Littlewood 函数」の母函数表示の応用として，K-理論的 Schur P，Q-関数に関する Pieri の規則(2 行の分割に対応するものを 1 行の積の和で表すもの)が，同じく「双対 K-理論的 Schur P，Q-関数」に対しても類似の結果が得られている．今後は，これらを踏まえ，両者の双対性(積と余積の関係)に着目して，特に,双対 K-理論的 Schur P，Q-関数について，Pieri の規則や母関数表示，Pfaffian 型の公式を求めたい．

(4) Lazard環の対称関数としての実現

項目３．で述べたように，我々は，幾何的・トポロジー的な対象に対して対称関数を用いた解釈を試みる，あるいは逆に対称関数のもつ諸々の性質に幾何的・トポロジー的な解釈を与える，といった視点で研究を進めている．この視点によると，無限ユニタリー群の分類空間BUの(コ)ホモロジーを対称関数環Λと同一視することができる．この解釈と Milnor-Thom スペクトラム MU に関する Hurewicz準同型とを合わせると，複素コボルディズム理論において重要な役割を演じるLazard環を対称関数環Λの部分環として実現できる．この実現を利用して，複素射影空間のボルディズム類の具体的な対称関数としての解釈を与えた．今後は，この解釈を推し進め，Lazard環の多項式環としての生成元を具体的な対称関数として実現し，その構造を明らかにしたい．これらの成果は研究集会「安定ホモトピー論とその周辺」(2017年3月，於 岡山大学)において発表された．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

① M. Nakagawa, H. Naruse, Universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions, Contemporary Mathematics, 査読有，Vol.708, 2018, pp.201 − 244,

http://dx.doi.org/10.1090/conm/708/14267

② T. Hudson, T. Ikeda, T. Matsumura, H. Naruse, Degeneracy loci classes in K-theory -Determinantal and Pfaffian formula-, Advances in Mathematics, 査読有, Vol.320, 2017, pp.115−156.

③ A. N. Kirillov, H. Naruse, Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using Id-Coxeter algebras, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, Vol.39, 2017, 695−728.

④ M. Nakagawa, H. Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, Vol.71, 2016, pp.337−417.

⑤ T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, Factorial P- and Q-functions represent equivariant quantum Schubert classes, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, Vol.53, 2016, pp.591−619.

〔学会発表〕(計 6 件)

① 成瀬 弘, シューベルト・カルキュラスの視点からの Hall-Littlewood 函数の一般化・母函数表示と応用, 日本数学会 2018 年度年会, 2018 年 3 月 21 日, 東京大学 (東京都・目黒区)

② 成瀬 弘, 一般化された Hall-Littlewood 函数の母函数表示についての代数的証明と応用, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年 3 月 25 日, 首都大学東京 (東京都・八王子市)

③ 中川 征樹, Symmetric function realization of the Lazard ring, 安定ホモトピー論とその周辺, 2017 年 3 月 15 日, 岡山大学 (岡山県・岡山市)

④ 中川 征樹, The universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2016 年 8 月 29 日, 信州大学 (長野県・松本市)

⑤ 中川 征樹, Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions, 第 42 回変換群論シンポジウム, 2015 年 11 月 28 日, 金沢勤労者プラザ (石川県・金沢市)

⑥ 中川 征樹, 普遍 Schur 関数と旗束上の Gysin の諸公式について, 第 62 回トポロジーシンポジウム, 2015 年 8 月 8 日, 名古屋工業大学 (愛知県・名古屋市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
https//edu.okayama-u.ac.jp/~suugaku/nakagawa (作成中)

6．研究組織

(1)研究代表者
中川 征樹 (NAKAGAWA, Masaki)
岡山大学・教育学研究科・准教授
研究者番号：50370036

(2)研究分担者
成瀬 弘 (NARUSE, Hiroshi)
山梨大学・総合研究部・教授
研究者番号：20172596

(3)連携研究者
池田 岳 (IKEDA, Takeshi)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号：40309539

仲田 研登 (NAKADA, Kento)
岡山大学・教育学研究科・准教授
研究者番号： 70532555

(4)研究協力者
( )