

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04885

研究課題名(和文) 群が作用するCAT(0)空間のBorel予想とNovikov予想に関連する研究

研究課題名(英文) Research on Borel conjecture and Novikov conjecture in CAT(0) spaces

研究代表者

知念 直紹 (Chinen, Naotsugu)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群・教授

研究者番号：20370067

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：理想境界が1次元普遍空間と同相になる双曲的直角コクセター群の幾何的特徴付けが得られ、この普遍空間を理想境界にもつ双曲的直角コクセター群をより具体的かつ視覚的に構成してみせた。高次元普遍空間を構成するために、測地距離空間の n -対称積の等長写像群を研究し、 p -距離をもつ q 次元バナッハ空間 X の n -対称積の等長写像群を調べ、ある X の2-対称積の等長写像群はある可換2-群と X の等長写像群の半直積と同型であり、 $n>2$ のとき X の n -対称積の等長写像群は X の等長写像群と同型であることが得られた。上記より、 q 次元ポアンカレ空間の2-対称積の等長写像群がどんな位相群になっているかは興味深い問題である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

理想境界が1次元普遍空間と同相になる双曲的非直角コクセター群の構成は初めてN. Benakli ' 氏の博士論文に登場したが、未だ数学雑誌にこの結果は出版されていない。しかしながら、私達はそのような性質をもつ双曲的直角コクセター群をより具体的かつ視覚的に構成し、数学雑誌に私達の結果を掲載したことは大いに学術的かつ社会的な意義があると思われる。また、無限次元の一部を除いて基本的なバナッハ空間の n -対称積の等長写像群を決定したこと、特に2-対称積の等長写像群のみ元のバナッハ空間の等長写像群と異なることが分かったことは重要な学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：We obtain characterizations of hyperbolic right-angled Coxeter systems whose boundaries are homeomorphic to 1-dimensional universal spaces, and construct it more concrete and visual. To construct high dimensional universal spaces as boundaries, we study n -th symmetric products of geodesic metric spaces. First, we discuss isometric groups of n -th symmetric products of fundamental q -dimensional Banach spaces X with p -metrics and have the following result: the isometric group of the 2-th symmetric product of some X is topologically isomorphic to the semidirect product group of some commutative 2-groups with the isometric group of X , and for $n > 2$ they are topologically isomorphic. Hence, it is of interest to know what topological group the isometric group of the 2-th symmetric product of the q -dimensional Poincare space is.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学的群論 コクセター群 位相幾何 対称積 等長写像群 Menger 曲線 Sierpinskiカーベット 理想境界

1. 研究開始当初の背景

本研究の目的は、幾何学的群論の中において重要な群である、 $CAT(0)$ 空間に幾何的に作用する無限 $CAT(0)$ 群を、その $CAT(0)$ 空間あるいはそのコンパクト化した空間の位相的性質からみた研究、あるいは無限離散群の研究、基本群に関連する多様体の不変量の研究における道具である Gromov によって提案された Coarse 幾何学からみた研究は、幾何学の研究の中心的な興味のある対象である。 $CAT(0)$ 群におけるボレル予想について $CAT(0)$ 群が作用する $CAT(0)$ 空間の位相次元の解明、Novikov 予想と関係の深い Coarse 的性質 asymptotic 次元の解明は重要な問題である。さらに、埋蔵問題と関連がある理想境界の普遍空間の構成も重要な問題である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、幾何学的群論の中において重要な群である、 $CAT(0)$ 空間に幾何的に作用する無限 $CAT(0)$ 群の研究である。具体的には研究目的は以下の通りである。

(1) $CAT(0)$ 群の幾何的に作用する $CAT(0)$ 空間の位相的性質あるいは Gromov に提案された Coarse 的な性質の研究。特に、Borel 予想と関連があるその $CAT(0)$ 空間の位相次元の有限性と、Novikov 予想と関連がある asymptotic 次元の有限性の研究。

(2) $CAT(0)$ 群であるコクセター群が幾何的に作用する $CAT(0)$ 空間の理想境界の研究。特に、その理想境界が位相的普遍空間となる $CAT(0)$ 群の構成に関する研究。

3. 研究の方法

コクセター群あるいは幾何学的群論に関する国内の第一人者である研究分担者の静岡大学の保坂哲也氏、次元論と Coarse 幾何学に関する第一人者である早稲田大学の小山晃氏と共同研究を行った。具体的には、メール・電話等を使用して定期的に連絡をして情報等を共有し、直接会って議論を重ねながら研究を押し進めた。特に、メールにおいて、共同研究を行う場合は絵を描いて説明することが多々あり、そのためスキャナーを利用し絵をメールで送ってやりとりをした。また、研究集会等に参加し、幾何学的群論あるいは Coarse 幾何学に関する情報を収集した。さらに、早稲田大学幾何学セミナーにおいて最新の幾何学的群論あるいは Coarse 幾何学について議論をした。得られた研究成果を研究集会において発表、あるいは数学雑誌に投稿・掲載した。

(1) 研究分担者の保坂氏はコクセター群あるいは幾何学的群論の研究について国内における先進的な研究者であるので、コクセター群から構成する $CAT(0)$ 空間、あるいは幾何学的群論の一般論に関してメール等で綿密に連絡を取り合い、あるいは直接あって共同研究を行った。特に、発表論文 2 の投稿・掲載に関して綿密なやりとりを行った。

(2) 早稲田大学の小山氏は次元論あるいは Coarse 幾何学の研究において国内で先進的な研究者である。よって、小山氏と次元論に関してメール等で綿密に連絡を取り合い、あるいは早稲田大学にて直接あって共同研究を行った。また海外からの Coarse 幾何学の情報を積極的に収集し、早稲田大学幾何学セミナーにおいて最新の幾何学的群論あるいは Coarse 幾何学について議論し理解を深めた。

4. 研究成果

(1) 無限コクセター群の境界として位相的普遍空間の構成について：すべての n 次元コンパクト距離空間は n 次元メンガー普遍空間に位相的に埋め込めるので、 n 次元理想境界を持つすべての双曲群（あるいは $CAT(0)$ 群）は理想境界が n 次元メンガー普遍空間となる双曲群（あるいは $CAT(0)$ 群）に Coarse の意味で埋め込める可能性がある。つまり、理想境界が n 次元メンガー普遍空間となる双曲群（あるいは $CAT(0)$ 群）を構成することは、 n 次元理想境界をもつ双曲群の研究に対してとても重要な問題となっている。Benakli 氏の博士論文において、コクセター群が幾何的に作用する双曲空間の理想境界が 1次元メンガー普遍空間となる双曲（非直角）コクセター群を初めて構成した（しかし、この結果は現在まで数学雑誌に論文として出版されていない）。その後、数人の研究者により理想境界が n 次元メンガー普遍空間となるコクセター群を構成したと発表されたが、現在まで数学雑誌に論文は出版されていない。静岡大学の保坂氏との共同研究において、ある条件下で理想境界が 1次元メンガー曲線（1次元コンパクト距離空間の普遍空間）またはシェルピンスキーカーペット（平面の 1次元コンパクト部分空間の普遍空間）となる双曲直角コクセター群の必要十分条件を示した。この結果より、理想境界がそれぞれ 2つの普遍空間となる双曲直角コクセター群とその群が幾何的に作用する双曲空間をより具体的に幾何的に構成した。この結果を数学雑誌に投稿し掲載したことは重要である（発表論文 2）。

(2) バナッハ空間の対称積の等長写像群について： Borsuk と Ulam によって導入された空間の対称積は、通常の積空間より複雑な空間になるため多くの研究者によって研究がなされてきた。また、ある空間に幾何的に作用する群はその空間の等長写像群の部分群なので、空間の等長写像群を調べることは幾何学的群論において重要である。CAT(0)空間の対称積にどんな群が幾何的に作用するかは興味深い問題であり、高次元メンガー普遍空間を境界にもつ幾何学的群の構成に応用される可能性がある。そのためバナッハ空間 X の n -対称積 $F_n(X)$ の等長写像群とその元の空間 X の等長写像群との関係を調べることは重要である。まず、基本的な p -距離をもつ q 次元（無限次元も含む）バナッハ空間 l_p^q の n -対称積 $F_n(l_p^q)$ の等長写像群 $\text{Iso}(F_n(l_p^q))$ を調べ、一部の無限次元を除いて決定した。つまり、 n が 3 以上のときこの等長写像群は l_p^q の等長写像群 $\text{Iso}(l_p^q)$ と同相かつ同型であり、 $n = 2$ のとき自然な写像において位相同型でない群があることを示した（発表論文 1）。詳しいことは次の表にまとめた。

	$p \backslash q$	$q = 1$	$q = 2$	$2 < q < \infty$	$q = \infty$
$n = 2$	$p = 1$		$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \text{Iso}(l_1^2)$?
	$1 < p < \infty$			$\text{Iso}(l_p^q)$	
	$p = \infty$		$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \text{Iso}(l^\infty)$	$(\bigoplus_{i=1}^{q-1} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \boxtimes \text{Iso}(l^q)$?
$n > 2$	$p = 1$?
	$1 < p < \infty$		$\text{Iso}(l_p^q)$		
	$p = \infty$?

表： $\text{Iso}(F_n(l_p^q))$ はどんな位相群か？（ \boxtimes は半直積を表す）

このことから、 n が 3 以上ならば、測地距離空間 X の n -対称積 $F_n(X)$ の等長写像群は X の等長写像群と同型だと予想されるが、2-対称積 $F_2(X)$ の等長写像群は X の等長写像群と異なると予想されるので、 $n = 2$ のときが特に興味深いことが分かる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Naotsugu Chinen	4. 巻 248
2. 論文標題 On isometries of symmetric products of metric spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 24-39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.08.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naotsugu Chinen, Tetsuya Hosaka	4. 巻 260
2. 論文標題 Hyperbolic right-angled Coxeter groups with boundaries as a Sierpinski carpet and a Menger curve	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 70-85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.03.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naotsugu Chinen	4. 巻 56
2. 論文標題 Symmetric products of the Euclidean spaces and spheres	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae	6. 最初と最後の頁 209-221
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14712/1213-7243.2015.118	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件／うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Naotsugu Chinen
2. 発表標題 On symmetric products of the Euclidean spaces
3. 学会等名 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications（国際学会）
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

ホームページ等
<http://researchmap.jp/naochin/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	保坂 哲也 (Hosaka Tetsuya) (50344908)	静岡大学・理学部・准教授 (13801)	幾何学の群論担当
連携研究者	小山 晃 (Koyama Akira) (40116158)	早稲田大学・理工学術院・教授 (32689)	次元論・Coarse幾何学担当