

平成 30 年 5 月 11 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04887

研究課題名(和文)多重超局所解析の基礎理論とその応用の研究

研究課題名(英文)Study of multi-microlocalization and its applications

研究代表者

本多 尚文 (Honda, Naofumi)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：00238817

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：多重超局所解析とは、複数の部分多様体に沿って同時に超局所化を行なうことを可能とする手法で、研究代表者らによって導入された。本研究は、この多重超局所解析を偏微分方程式論等に応用する際に必要となる基礎理論を構築し、多重超局所作用素の理論を構築することが目標である。研究期間の前半2年では、縮退する場合を含むような一般的な場合まで理論を拡張した。後半では、多重超局所作用素の理論を構成する上で、大変有効な手法であると考えられるチェックドルボー理論を超関数理論へ応用する研究を行い、幾つかの興味深い結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Multi-microlocalization is a method which enables us to microlocalize an object along several manifolds simultaneously. The purpose of this research is to extend this method to more general cases, and then, to establish a theory of multi-microlocal operators. In the first two years of our research, we studied generalization of multi-specialization and succeeded in constructing multi-specialization for a general family of submanifolds located suitably. During the rest of the period, we studied applications of Cech-Dolbeault cohomology theory to the theory of hyperfunctions. We had several interesting results, which suggested us that the theory is very effective for a construction of multi-microlocal operators too.

研究分野：代数解析

キーワード：超局所解析 多重特殊化

1. 研究開始当初の背景

多重超局所解析は研究代表者らによってその理論が構築されたもので、複数の部分多様体に沿って同時に超局所化を可能とするものである。この理論の特色には以下のようなものがある。

(1) 既存の強多重漸近展開の理論や同時超局所化の理論等を含んでおり、それらを統一的に扱う事が可能となる。更に、部分多様体の配置を変えることでいくつもの興味深い新たな対象を作ることが可能である。

(2) 多重超局所化の対象として、通常の古典的な層の他に様々なサイト上の層の多重超局所化が可能である。このことにより、例えば多項式増大度で記述されるような解析的对象や漸近展開層のように所謂ホイットニー関数で記述されている対象の多重超局所化が可能である。

(3) マイクロサポートの理論を用いて、多重超局所化された対象のマイクロサポートを多重錐集合を用いて評価が出来る。この評価により様々な偏微分方程式の解の性質を明らかにすることが出来る。ただし、所謂表象理論が作られていないので、表象を用いた論議が出来無なかった。

他方、代数解析においては、対象を記述する上で頻繁に局所コホモロジー群を用いる。例えば、超関数(hyperfunctions)は、局所コホモロジー群を用いて定義されるし、また、本研究課題にある多重超局所化も多重錐を台とする局所コホモロジー群によって記述される。このように、局所コホモロジー群は本研究課題において最も基本的な重要な道具である。しかしながら、その理論は決して平易なものではなく、積分等の操作において層係数の局所コホモロジー群の振舞いを理解するのは容易でない。この困難を解消する1つのアプローチとして、諏訪らが研究を進めているチェックドルボーコホモロジーの理論があった。

2. 研究の目的

多重超局所化の理論を解析的な対象、例えば、偏微分方程式論等に応用する上で特に重要なのは、多重超局所作用素を構成することである。同時に、その表象理論も構築することが望ましい。本研究の目的は、これらの事柄、つまり、多重超局所作用素とその表象理論の構成が目標である。

既に研究代表者らは多重超局所化の基礎理論のいくつかを確立しており、それらを用いることで研究目標を達成できると考えられた。しかしながら、研究目的を実現するためにはいくつかの解決しなければいけない問題もあった。それらを2つに大まかに分けると以下のとおりであった。

(1) それまでの多重超局所化の理論は、対象となる部分多様体の配置が正規交差か包含関係があるときのみが許されており、はなはだ限定された幾何的状况のみを対象とされていた。例えば、正規交差はしていないが、いわゆる clean intersection を持つような場合に対して理論を適用することが出来なかった。多重超局所作用素の核を構成するためには、このような限定された幾何的状况のみでは不十分であり、より一般的な部分多様体の配置でも理論が適用できる必要があった。また、部分多様体が一般的な配置の場合に現われる幾何は、今まで扱ってきた幾何とは本質的に異ったものが現われることが予想されていた。実際、2つの部分多様体が正規交差していないが clean intersection を持つような場合の正規変形で現われる中心多様体はもはやベクトルバンドルの構造を持たないことが判っており、本質的に今迄とは異なっていることが判っていた。この幾何を適切に記述する代数的な道具建てが必要であった。

(2) 一般に局所コホモロジーによって定義されている核関数のコホモロジーによる積と核関数に対応する表象の間に定義されるライプニッツルールから誘導される積は当然両立することが期待される。しかしながら、通常超局所化の場合でさえ、これを示すのははなはだ困難である(最近、研究代表者らによって解決された)。この困難の主な理由は超局所作用に現われるコホモロジーの積分を具体的な関数の積分として実現することの困難さに起因している。この、困難さを回避できるような良い性質を持ったコホモロジーの表現が必要であった。

本研究課題の解決には、上記(1),(2)の困難さを解決できるような新しいアイデアが必要であった。

3. 研究の方法

この研究課題の解決においては、様々な知見が必要である。それらは、例えば、subanalytic サイト上の層の理論、多重特殊化の理論、超局所作用素とその表象理論、チェックドルボーコホモロジーの理論等のように多岐にわたる。また、これらの理論を融合的に用いる必要があり、理論に熟練している必要がある。従って、関連する分野の専門家と多くの研究打ち合せを行ない、多方面から当該問題について討論を行うことが研究遂行上大変重要であると考えられた。研究期間全体を通して多くの研究者との研究打ち合せを行うことで研究を進めた。また、研究集会を多数開催し、また多くの国内外の研究集会に積極的に参加した。そこで、多様な多くの人々から様々なアドバイスや問題解決のアイデアとなるヒントを得ることが出来た。

4. 研究成果

(1) 研究期間の前半2年間は研究目的の(1)の問題を解決することを主な目標とした。結果として、多重超局所化を極めて一般的な配置の部分多様体の族に対しても適用できるような理論に拡張することに成功した。この拡張において、新しく現われる幾何を記述するアイデアとして、多様体が定義する局所作用から誘導される半群構造を定義し、その半群が定める一般化された錐を用いるという新しい手法を開発した。また、これを漸近展開層の理論に適用することで、強漸近展開層の理論を様々な場合に拡張することに成功した。この方法の最大の利点は、構成が特殊化関手を用いることで実現されているために、種々の代数的な結果、特に岡の消滅定理を直接利用することが出来ることである。実際、ホイットニー正則関数に対して、岡の消滅定理の類似結果を示すことにより、種々の強漸近展開層に対する Borel-Ritt 型の定理を容易に示すことが出来る。

(2) 研究期間の後半は研究目的の(2)を解決することに主力を割いた。既に述べたとおり、この問題を解決するには、コホモロジーの良い表現が必要であった。この表現として、チェックドルボーコホモロジーの理論が有効ではないかとの着想を得た。そこで、その有効性を確かめるために、超関数の理論をチェックドルボーコホモロジーの理論を用いて記述することを試みた。この試みは非常に上手くいき、超関数のコホモロジーの意味での積分等が極めて明快に書き下せることがわかった。他にも、様々な新しい手法を導入することが出来、多くの興味深い結果を得た。例えば、境界値写像をこの枠組みで構成することが出来るが、その写像の実現は極めて簡潔であり、また、幾何との結びつきが明快である。

これらの結果から、超関数の理論の場合と同様に、この理論を多重超局所作用素の核関数のコホモロジーの表現に用いることで、研究目的の(2)で述べた良いコホモロジーの表現を与えることが出来、最終的に問題を自然な形で解決することが出来るであろうとの強い感触を得た。残念ながら、研究期間内には最終的な解決を達成できなかったが、今後研究を進める予定である。

本研究課題の達成に関する最終的な状況を纏めると次のようになる。研究目標を完全に達成することは時間的な問題もあり叶わなかったが、問題を解決するためのアイデアや手法を見付けることには成功したと言える。ここで得られた手法、アイデアを用いて研究を続行することにより最終的な解決に至ると考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

[1] Laplace hyperfunctions in several variables,

N. Honda and K.Umeta,

Journal of the Mathematical Society of Japan, 70(1), 111-139, 2018 (査読あり)

[2] Foundation of symbol theory for analytic pseudodifferential operators, I, T. Aoki, N. Honda and S. Yamazaki, Journal of the Mathematical Society of Japan, 69(4), 1715-1801, 2017 (査読あり)

[3] On the theory of Laplace hyperfunctions in several variables, N.Honda and K.Umeta, RIMS Koukyuroku, 2020, 29-34, 2017, (査読なし)

[4] Generalization of multi-specializations and multi-asymptotics, N.Honda and L.Prelli, RIMS Koukyuroku, 2020, 18-28, 2017 (査読なし)

[5] Apparent parameter technique and vanishing of cohomology groups with Whitney holomorphic functions, N.Honda, RIMS Koukyuroku, 2020, 10-17, 2017 (査読なし)

[6] An invitation to Sato's postulates in micro-analytic S-matrix theory, N.Honda and T.Kawai, RIMS Koukyuroku Bessatsu, B61, 23-56, 2017 (査読あり)

[7] Multi-microlocalization and microsupport, N.Honda, L. Prelli and S.Yamazaki, Bulletin de la Société Mathématique de France, 144(3), 569-611, 2016 (査読あり)

[8] A study of pinch points and cusps in the Landau-Nakanishi geometry, N.Honda and T.Kawai, Kokyuroku Bessatsu B57, 195-234, 2016 (査読あり)

[9] Multi-microlocalization, N.Honda, L.Prelli and S.Yamazaki, Kokyuroku Bessatsu B57, 93-116, 2016

(査読あり)

[10] On the geometric aspect of Sato's postulates on the S-matrix, N. Honda, T. Kawai and H. P. Stapp, RIMS Koukyuroku Bessatsu, B52, 11-53, 2015 (査読あり)

[11] On the sheaf of Laplace hyperfunctions in several variables, N. Honda and K. Umeta, RIMS Koukyuroku Bessatsu, B52, 213-218, 2015 (査読あり)

[12] Kernel functions and symbols of pseudodifferential operators of infinite order with an apparent parameter, T. Aoki, N.Honda and S.Yamazaki, RIMS Koukyuroku Bessatsu B52, 175-192 2015 (査読あり)

〔図書〕(計 1 件)

Virtual turning points, Springer
briefs in Mathematical Physics, 4,
N.Honda, T.Kawai and Y.Takei
Springer, 1-125, 2015

6. 研究組織

(1) 研究代表者

本多 尚文 (HONDA Naofumi)
北海道大学・理学研究院・教授
研究者番号： 00238817