

平成 30 年 5 月 14 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04888

研究課題名(和文) 量子場の理論の数学的諸問題と無限次元解析学

研究課題名(英文) Mathematical problems in quantum field theory and infinite dimensional analysis

研究代表者

新井 朝雄 (Arai, Asao)

北海道大学・理学研究院・特任教授

研究者番号：80134807

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 量子場のモデルにおける基底状態の縮退度に関して，上からの一般的な評価式を導いた。(2) 量子場の諸々のモデルを数学的に構成する上で基礎となる正準交換関係と正準反交換関係の表現における非同値表現で物理的に重要な意味をもつものを探求し，詳しく解析した。(3) 一般の量子系に対して，超弱な時間作用素(ultra-weak time-operator)の概念を導入し，時間作用素の階層性と各々の物理的役割を考察した。

研究成果の概要(英文)：(1) An upper bound for the multiplicity of ground state of a class of quantum field models has been derived. (2) Detailed analyses have been done on in-equivalent representations of canonical commutation relations and canonical anti-commutation relations, which have physically important meanings. (3) For a general quantum system, a concept of ultra-weak time-operator has been introduced. Hierarchies of time-operators and their respective physical roles have been considered.

研究分野：数学

キーワード：フォック空間 無限次元解析 無限次元ディラック作用素 無限次元ラプラシアン 超対称性 超対称的量子場 時間作用素 正準交換関係と正準反交換関係の表現

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究代表者は 1980 年代の終わりから 1990 年代の始めにかけて、ボソン-フェルミオンフォック空間上の無限次元解析を創始し、新しい作用素として、有限次元多様体上の外微分作用素の無限次元版ともいべき作用素を導入した。この作用素は、ボソンフォック空間の 1 粒子ヒルベルト空間からフェルミオンフォック空間の 1 粒子ヒルベルト空間への稠密に定義された閉作用素によってラベル付けがなされる。

(2) (1)で言及した作用素を用いて、稠密に定義された閉作用素を添え字にもつ無限次元ディラック型作用素を定義し、その基本的な性質を明らかにした。また、この無限次元解析の枠組みは超対称的量子場の理論の数学的構造を解析する上で有効であることも示した。だが、無限次元ディラック型作用素のスペクトル解析はまだ不十分な状況にあった。具体的には、有限次元空間上のディラック型作用素の諸性質のうち、どのような性質が保持され、どのような性質が保持されないのか、あるいは無限次元ディラック型作用素に特有の性質は何か、等々、さまざまな興味深い問題が残されていた。

(3) ボソン-フェルミオンフォック空間は正準交換関係と正準反交換関係の表現を担う基本的なヒルベルト空間の一つであるが、この側面も十分に研究されているとは言い難い。

(4) (1)で言及した研究で、研究代表者は、ボソン-フェルミオンフォック空間上の第 2 量子化作用素とその摂動について、それらが生成する強連続 1 パラメータ半群に対して径路積分表示 (汎関数積分表示) を導いていたが、摂動のクラスをもっと広げる問題は未解決問題として残されていた。また、径路積分表示のスペクトル解析への応用も手つかずのままであった。

2. 研究の目的

(1) ボソン-フェルミオンフォック空間上の無限次元ディラック型作用素のスペクトル解析を行う。特に、有限次元ディラック型作用素の一般的性質のうち、どのような性質が無限次元ディラック型作用素の場合にも保持されるか、また、無限次元ディラック型作用素に特有の性質は何かを明らかにしたい。

(2) 無限次元ディラック型作用素に対して、有限次元のディラック型作用素の指数定理に相当する定理がどのような形をとるかを明らかにしたい。

(3) ボソン-フェルミオン空間は正準交換関係と正準反交換関係の表現を担う自然なヒルベルト空間の一つであるので、この側面を

超対称的量子場の理論との関係で調べることは重要である。

(4) 一般の量子系に対して、時間作用素の概念が定義される。これは正準交換関係の第 2 義的表現である。ボソン-フェルミオンフォック空間においても正準交換関係の第 2 義的表現で興味のあるものを見出すことは興味深い課題である。この側面も探求する。

3. 研究の方法

(1) 無限次元ディラック型作用素のスペクトル解析については、この作用素に特有の構造を見出し、それに付随する一般的な作用素論を構築する。摂動論的な観点からは、まず、比較的単純な摂動のクラスについて研究を行う。次いでより複雑でより一般的なクラスの摂動を考察する。

(2) 有限次元ディラック型作用素の諸々の性質のうちで、無限次元ディラック型作用素でも成立するものとそうでないものとを分類し、無限次元ディラック型作用素に特有の現象を見出す。また、そのような現象の超対称的量子場の理論の文脈における意味について考察する。

(3) その物理的を正準交換関係と正準反交換関係の表現については、スカラー場の理論やディラック場の理論を統一する形式を探求する。これと関連して新しい時間作用素のクラスも探求する。

4. 研究成果

(1) 一般に、量子系の全エネルギーを表すハミルトニアン H のスペクトル $\sigma(H)$ の下限が固有値であるとき、系(またはそのハミルトニアン)は基底状態をもつという。基底状態の存在は系の安定性を保証するという意味で重要である。だが、基底状態の存在は自明ではない。そこで、与えられたハミルトニアンが基底状態をもつかどうかを調べることは理論的に重要な問題の一つになる。量子系における基底状態の存在を示す手法ならびに基底状態の縮退度を上から評価する手法(質量が正の場合の量子場のモデルの場合)は様々に開発されてきた。だが、質量ゼロの量子場が関与するモデルの基底状態の縮退度に関する一般論は無い状況であった(いわゆる赤外発散の問題が絡む)。今回の研究の成果の一つは、質量ゼロの量子場を含む一定のクラスの量子場の理論のモデル(超対称的な量子場の理論のモデルも含む)の基底状態の縮退度について上からの評価式を得たことである。

(2) 中性量子スカラー場のモデルを構成する際に、時刻ゼロの場(初期時刻の場)として、正準交換関係(canonical commutation relations; CCR)の表現が使用される。通常表現は、量子場のボソンの質量 m に依存し

て定まり、しかも既約なヴァイル表現になる。ゆえに、 m によってラベル付けられる、CCR の既約ヴァイル表現の族が存在する。だが、この場合、質量が異なる表現どうしは非同値であることが証明される。これはたいへん興味深い事実であり、ボソンの質量の表現論的な意味を明らかにする。今回の研究では、今述べた事実の背後にあるより普遍的な構造が明らかにし、互いに非同値な CCR の既約ヴァイル表現の一般的クラスが見出した。

(3) フェルミオン場の典型的な例として量子ディラック場がある。量子ディラック場の理論を構成する場合には、時刻ゼロの場として正準反交換関係 (canonical anti-commutation relations; CAR) の表現が用いられる。この表現はディラック粒子の質量によってラベル付けられ、既約である。今回の研究では、質量が異なる CAR の表現は非同値であることが証明された。さらに、今の述べた、通常の CAR の表現の背後により普遍的な構造が存在することが明らかにされた。

(4) 一般の量子系に対して、時間作用素なる対象が存在し得る。これは、有限自由度の CCR の第 2 義的表現として与えられる場合が多い。これまでいくつかの時間作用素のクラスが見出されてきた。今回の研究では、新たに、超弱な時間作用素 (ultra-weak time-operator) の概念を導入し、この時間作用素も含めて、時間作用素の階層性とそれぞれの階層の物理的な役割について考察した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① 新井 朝雄, 量子場の数理解析, 数学, 査読有, 69 巻 (2017), 255-279

② Asao Arai, Inequivalence of quantum Dirac fields of different masses and the underlying general structures involved. Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics, 31--53, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., 査読有, Zurich, 2017

③ Asao Arai, Fumio Hiroshima, Ultra-Weak Time Operators of Schroedinger Operators, Ann. Henri Poincare, 査読有, Vol. 18 (2017), 2995—3033, DOI 10.1007/s00023-017-0586-x

④ Asao Arai, A family of inequivalent Weyl representations of canonical commutation relations with applications to quantum field theory, Reviews in

Mathematical Physics, 査読有 Vol. 28, No. 4 (2016) 1650007 (26 pages), <https://doi.org/10.1142/S0129055X16500070>

⑤ Asao Arai, Daiju Funakawa, Upper bounds on the degeneracy of the ground state in quantum field models, Advances in Mathematical Physics, 査読有, Volume 2016, Article ID 8908413, 13 pages, DOI: 10.1142/S0129055X16500070

[学会発表] (計 2 件)

① Asao Arai, Spectral analysis of infinite dimensional Dirac operators on an abstract boson-fermion Fock space, 「量子場の数理とその周辺」 (Mathematical Aspects of Quantum Fields and Related Topics), June 27, 2017, RIMS Kyoto University, 招待講演

② Asao Arai, Inequivalence of quantum Dirac fields of different masses and a general structure behind it, Mathematical quantum field theory and related topics, June 6, 2016, IMI Kyushu University, 招待講演

[図書] (計 3 件)

① Asao Arai, Analysis on Fock Spaces and Mathematical Theory of Quantum Fields, World Scientific, 2018, 862

② 新井 朝雄, フォック空間と量子場 上 増補改訂版, 日本評論社, 2017, 355

③ 新井 朝雄, フォック空間と量子場 下 増補改訂版, 日本評論社, 2017, 365

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 件)

名称 :
発明者 :

権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

新井 朝雄 (ARAI, Asao)
北海道大学・大学院理学研究院・特任教授
研究者番号：80134807

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()