

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04892

研究課題名(和文)四面体方程式と量子可積分系

研究課題名(英文) Tetrahedron equation and quantum integrable systems

研究代表者

国場 敦夫(Kuniba, Atsuo)

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号：70211886

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：非平衡統計力学に於けるマルコフ過程の模型として可積分なものを構成した。1次元格子上的非対称な確率的動力学に従うn種類の粒子系として定式化され、既存の多くの模型を包括している。四面体方程式や量子群の結晶基底の理論との関係を解明し、定常状態の行列積表示を得た。これにより定常確率について知られていた組合せ論的アルゴリズムの表現論的起源を明らかにした。またn=2の場合に粒子密度や流れの厳密な結果を導き、模型の持つ物理的様相を定性的、定量的に明らかにした。

研究成果の概要(英文)：An integrable model in Markov processes in non-equilibrium statistical mechanics was constructed. It is formulated as a stochastic dynamics of n kinds of particles on one-dimensional lattice obeying asymmetric transition rules. It includes a majority of such models which have been studied so far. The relation to the tetrahedron equation and the theory of crystal base of quantum groups was clarified and a matrix product formula was derived for the stationary states. They revealed the representation theoretical origin of the known algorithm to calculate stationary probabilities.

For n=2, density and current profile of the particles were derived and the physical aspects of the model was clarified both qualitatively and quantitatively.

研究分野：数理物理学

キーワード：可積分系 マルコフ過程 量子群 ヤン・バクスター方程式 四面体方程式 行列積

1. 研究開始当初の背景

3次元可積分系の基礎方程式である四面体方程式に幾つか興味深い解が知られていた。特に、その解を $n$ 回合成した演算子をしかるべく簡約することにより、2次元の量子可積分系で最も基本的な役割を果たす量子 R 行列を系統的に構成出来る事が知られていた。これらは主に非例外型量子アフィン代数の  $q$ -振動子表現に付随する R 行列であり、特に A 型の場合は対称テンソル表現、反対称テンソル表現を含む。いずれも粒子が隣接格子点にホップするという動力学的解釈と馴染みやすい構造をしていた。しかしながら、それが非平衡統計力学のモデルへの応用を持つかは全く未知であり、むしろ誰も予期しない事であった。非平衡系においては粒子の定常確率に対して行列積型の明示式を構成することにより、様々な物理量の計算が実践されていたが、上に述べた四面体方程式の簡約との関係は全く分野の異なる結果と考えられていた。

2. 研究の目的

可積分なマルコフ過程のモデルを系統的に拡張する。定常状態を行列積により記述する。定常確率に対する組合せ論的なアルゴリズムの表現論的な起源を明らかにする。四面体方程式に基づく R 行列の行列積表示を介して3次元可積分系の新しい応用を開拓する。また、粒子の遷移レートに非一様パラメーターを導入し、モデルを拡張する。ストカスティック R 行列を導入し、可換なマルコフ転送行列の族を構成する。その固有値を解析的ベータ仮説により与える。また、付随するモデルが既存のモデルをどのように包括するかを明らかにする。2種の粒子がある場合に、一方を不純物とみなし、もう一方の粒子の密度な流れに対する影響を定量的に記述し、物理的性質を明らかにする。

3. 研究の方法

多種の粒子を含む完全非対称単純排他過程については、フェラーリとマルティンによる定常確率の構成アルゴリズムを組合せ R により記述する。角転送行列に該当する2次元格子の4分の1の領域に応じて組合せ R の合成をとる。その際、第4象限の境界条件が完全非対称単純排他過程の与えられた粒子配位により指定される。定常確率はこれを満たす配置の個数に一致することを示す。これにより、整数に規格化された定常確率の相対値を格子モデルの配位の数え上げ問題に帰着する。完全非対称単純排他過程に関与する量子群の結晶基底は A 型の反対称テンソ

ル表現に付随するものだが、これを対称テンソル表現に置き換えて並行した構成を行う。これにより定常確率の候補が計算される。それらを実際に定常確率とするマルコフ過程を探索する。最初は隣接格子点に働く局所マルコフ行列を仮設し、計算機実験により、与えられた定常確率を成分に持つ状態に作用させて0となるようにパラメーター等を絞り込んでいく。そのような探索と組合せ論的な考察を併せて新しいマルコフ過程を同定する。

一方、結晶基底に限らずに量子群の変形パラメーター  $q$  が零でない一般の場合の R 行列を扱い、行列要素が明示的に非負になるようなスペクトルパラメーターの特殊値を探索し、そこでマルコフ行列の要請を満たすように整形できるかを考察する。そのように構成した一般のモデルに対してマルコフ転送行列の固有値を解析的ベータ仮説により求める。これは通常の頂点モデルの転送行列の固有値と同じ構造をもち、ゲージのパラメーターを合わせる事で達成可能である。また、 $q$  変形されたボソンを用い、定常確率を行列積として表す。それには  $q$  ボソンの消滅演算子の積を初項として、生成演算子による摂動展開を仮定し、計算機を援用しながら局所定常条件を摂動の各次数で整合的に解いていく。そうして予想を定式化し、あとは解析的に証明する。ストカスティック R 行列に付随する多状態ゼロレンジモデルのうち、2種類の粒子がある場合を解析する。一方の種類の粒子は固定した条件付き確率を用い、もう一方の粒子の局所密度やカレントを求め、システムサイズ無限大での挙動を解析する。必要に応じて計算機で数値的な評価をし、不純物の効果を定性的、定量的に記述する。

4. 研究成果

非平衡統計力学に於けるマルコフ過程のモデルとして可積分なものを構成し、解析した。既存の結果に対しても表現論的な起源を明らかにした。実際には以下に記すように多岐にわたる成果を得た。

(1) 1次元格子上の完全非対称単純排他過程についてフェラーリとマルティンにより得られていた定常確率の構成アルゴリズムが量子群の結晶基底の組合せ R の合成に一致することを証明した。これは中屋敷と山田による A 型量子群の反対称表現同志のテンソル積に作用する R の組合せ論的なアルゴリズム (1996) との比較、同定による。これにより非平衡系の多状態モデルの定常状態に対して、量子群の対称性が初めて発見された。フェラーリとマルティンによるキ

ューイング(待ち)過程の本質を明らかにしただけでなく、通常のネスレットと呼ばれるペーテ仮説法によるハイヤランクのモデルの解析と比べても際立った特徴を持つ結果となっている。特に、物理的な空間格子の自由度と内部対称性の自由の空間が入れ替わった記述になる点は特筆に値する。

(2) 組合せ  $R$  の 3 次元構造を用いて定常性の証明を層転送行列の 2 次関係式に昇格した。これはもとの関係式をパラメーター  $q$  により一般化したものとなっている。四面体方程式を用いて層転送行列の 2 次関係式を導出し、さらに  $q$  が 0 となる極限で元のモデルの局所定常条件を証明した。これはフェラーリとマルティンによる組合せ論的な議論によらない新しい証明となっている。また整数に規格化された定常確率が 3 次元格子モデルの状態数と同定された。これにより 3 次元可積分系との関係の一端が捉えられた。

(3) 完全非対称単純排他過程の際には  $A_n$  型量子群の完全反対称表現の結晶基底が関与したが、これを完全対称テンソル表現に置き換えた系に対して並行した構成を行った。モデルとしては 1 次元格子上的  $n$  種の粒子からなる新しい完全非対称零レンジモデルが得られた。粒子の内部自由度のラベルに応じて遷移に優先条件が設定された新しいモデルである。そのような状況下で定常確率に系統的な行列積構造があることは認識されていなかった。可解格子モデルの角転送行列に類似の構造を考えることにより、定常確率に対して組合せ  $R$  に基づくアルゴリズムを得た。組合せ論的な証明に加え、3 次元可積分格子モデルの層転送行列の 2 次関係式の極限をとることにより、定常性の別証明も与えた。層転送行列にはパラメーター  $q$  が入り、より一般の関係式となっている。2 次関係式の証明には四面体方程式が決定的な役割を果たす。これにより、3 次元可積分系の新しい応用が開拓された。以上の結果により完全非対称単純排他モデルと完全非対称零レンジモデルは量子群の結晶基底や四面体方程式の立場からは自然なパートナーであることが示された。

(4) (3) で構成した零レンジモデルにたいして遷移確率が粒子の種類に依存する拡張を得た。粒子の種類に数に関する帰納法を用い、直接計算により、定常条件を証明し、定常確率の組合せ論的なアルゴリズムを得た。 $A$  型量子群の対称表現のテンソル積に働く組み合わせ  $R$  の像を決定する中屋敷・山田アルゴリズムに類

似だが、それをより繊細に拡張したものとなっている。

(5)  $A_n$  型量子群の完全対称表現に付随する量子  $R$  行列において、スペクトルパラメーターを対称表現の次数の差という特殊値にとると、すべての行列要素が因子化するという顕著な性質を発見した。これにより、行列要素が非負になる領域を顕に決定できる。更に全確率保存条件も満たすように整形できる事を示し、ストカスティック  $R$  行列と名付けた。全確率保存条件のうち、マルコフ行列のある成分の和が 1 になるという代数的条件は、最高ウェイトベクトル上で  $R$  行列の作用が自明になるという関係式の量子群の古典部分によるオービットにほかならないことを示した。これはマルコフ行列の性質と量子群を結びつける新しい知見である。このストカスティック  $R$  行列に付随するモデルは、これまで知られていたほとんどすべてのゼロレンジ型モデルを含んでいることを示した。また、解析的ペーテ仮説によりマルコフ行列の固有値をあたえ、モデルの双対性を反映する構造を見出した。

(6) (5) で得られたモデルに対して、定常条件であるザモロジコフ・ファデエフ代数の表現を構成し、定常確率に対する行列積型明示式を得た。結果は  $q$  変形されたボソンを含む量子二重対数型の演算子を用いて表示される。これまで排他過程のモデルの行列積演算子としても  $q$  変形されたボソンは用いられていたが、その無限積が登場したのは初めてであり、ランク  $n$  に関しての入れ子構造を持っている。

(7) (6) で得た定常確率を用いて  $n=2$  の場合にモデルの物理的性質を解析した。具体的には 2 種の粒子のうち的一方を不純物として扱い、もう一方の粒子の局所密度やカレントに及ぼす影響を調べた。不純物の存在する領域とその左右の領域で上記物理量のシステムサイズ無限大での明示式を得、数値計算を援用した定性的な描像と合わせて提示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

A.Kuniba, and V.V.Mangazeev, Density and current profiles in  $U_q(A^{(1)}_2)$  zero range process, Nucl. Phys. B922 (2017) 148--185 (査読あり)

A.Kuniba, and M.Okado, Integrable

structure of multispecies zero range process, SIGMA 13 (2017), 044, 29 pages. (査読あり)

A.Kuniba, and M.Okado, A q-boson representation of Zamolodchikov-Faddeev algebra for stochastic R matrix of  $U_q(A^{(1)}_n)$ , Lett. Math. Phys. 107 (2017) 1111-1130 (査読あり)

A.Kuniba, Combinatorial Yang-Baxter maps arising from tetrahedron equation, Theor. and Math. Phys. 189 (1): (2016) 1472--1485 (査読あり)

A.Kuniba, and M.Okado, Matrix product formula for  $U_q(A^{(1)}_2)$ -zero range process, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 044001 (20pp) (査読あり)

A.Kuniba, V.V.Mangazeev, S.Maruyama, and M.Okado, Stochastic R matrix for  $U_q(A^{(1)}_n)$ , Nucl. Phys. B913 (2016) 248--277 (査読あり)

A.Kuniba, S.Maruyama, and M.Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: II. Hat relation and tetrahedron equation J. Integrable Sys. (2016) : xyw008 (査読あり)

A.Kuniba, S.Maruyama, and M.Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: I. Multiline process and combinatorial R, J. Integrable Sys. (2016) : xyw002 (査読あり)

A.Kuniba, S.Maruyama, and M.Okado, Inhomogeneous generalization of multispecies totally asymmetric zero range process, J. Stat. Phys. 164 (2016) 952--968. (査読あり)

A.Kuniba, S.Maruyama, and M.Okado, Multispecies TASEP and the tetrahedron equation, J. Phys. A: Math. Theor. 49 (2016) 114001 (22pp). (査読あり)

A.Kuniba, S.Maruyama, and M.Okado, Multispecies TASEP and combinatorial R, J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 34FT02 (19pp). (査読あり)

A.Kuniba, M.Okado and S.Sergeev, Tetrahedron equation and generalized quantum groups. J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 304001(38pp) (査読あり)

[学会発表](計 6 件)

国場敦夫, Matrix products in integrable probability, 日本数学会企画特別講演, 2017年3月27日, 首都大学東京(東京都八王子市)

国場敦夫, V. Mangazeev, 尾角正人, 丸山翔也, Stochastic R matrix for  $U_q(A^{(1)}_n)$ , 日本数学会, 2016年9月15日, 関西大学(大阪府吹田市)

国場敦夫, 尾角正人, 丸山翔也, 一次元

排他過程と四面体方程式, 日本物理学会, 2016年3月21日, 東北学院大学(宮城県仙台市)

国場敦夫, 尾角正人, 丸山翔也, 多状態 TAZRP, 日本数学会, 2016年3月19日, 筑波大学(茨城県つくば市)

国場敦夫, 丸山翔也, n-状態 TASEP と量子群の組み合わせ R, 日本物理学会, 2015年9月16日, 関西大学(大阪府吹田市)

国場敦夫, 尾角正人, 丸山翔也, 多状態 TASEP と四面体方程式, 日本数学会, 2015年9月13日, 京都産業大学(京都市)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等  
<http://webpark1739.sakura.ne.jp/atsuo/indexLP.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

国場 敦夫 (KUNIBA ATSUO)

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号: 70211886

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：

(4)研究協力者 ( )