

令和元年6月20日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04894

研究課題名(和文) パンルヴェ方程式を中心とした可積分系の研究

研究課題名(英文) Research of integrable systems around the Painleve equations

研究代表者

坂井 秀隆 (SAKAI, Hidetaka)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50323465

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題に関係して、論文を2本学術誌に発表した。

1つは、神保氏、名古屋氏との共同研究で、 q 差分パンルヴェ方程式の一般解を構成した研究である。微分方程式の場合の、モノドロミー保存変形の変形方程式系の解を5点共形ブロックを使って構成し、その展開から解を求めるという方法の、 q 差分類似を考えた。

1つは、山口氏との共同研究で、線型 q 差分方程式の分類理論に関する研究である。この論文で、線型方程式を分類する際の指針となるスペクトル型の定義、および中間畳み込みというジャクソン積分を使った方程式の変換の定義をし、この変換がしかるべき性質を持っていることを示したものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線型の函数方程式については、線型の同様な問題と比べて有効な一般論を構築することが難しい。解となる函数の具体的な性質にいたっては、代数函数や超幾何函数などのよく知られた特殊函数によって具体的に記述できる特別な場合を除くと、なかなか解析ができないのが現状である。 q 差分パンルヴェ方程式の一般解が構成できたことは、具体的な計算に向けての重要な手がかりを与えることになる。

研究成果の概要(英文)：In this research project we published two papers in the journals.

The first one is a joint research with M. Jimbo and H. Nagoya, which is a research that has constructed a general solution of a q -difference Painleve equation. In the case of differential equations, the solutions of deformation equation systems of isomonodromic deformation are constructed using 5-point conformal blocks, and solutions are obtained from their expansions. We have considered a similar theory for the q -difference case.

The second one is a collaborative research with M. Yamaguchi, which is a study on the classification theory of linear q -difference equations. In this paper, the definition of the spectral type to guide the classification of linear equations, and the definition of the transformation of the equation using Jackson's integral called the middle convolution, are given. We also showed that this transformation has appropriate properties.

研究分野：特殊函数論

キーワード：パンルヴェ方程式 差分方程式 特殊函数 超幾何函数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究領域は非線型可積分系といわれる分野である。非線型の函数方程式については、線型の同様な問題と比べて有効な一般論を構築することが難しい。解となる函数の具体的な性質にいたっては、代数函数や超幾何函数などのよく知られた特殊函数によって具体的に記述できる特別な場合を除くと、なかなか解析ができないのが現状である。一方で、楕円函数、超幾何函数などの特殊函数によってひとたび記述されてしまえば、劇的にいろいろな計算が可能となってくる。

楕円函数などのよく知られた特殊函数とは別の新しい特殊函数を作ろうという試みは当然のもので、パンルヴェ方程式はこのような意図の下、二十世紀はじめに発見された。パンルヴェらは、動く特異点は極だけであるという条件を課した場合の正規形2階代数的常微分方程式の分類を行い、新しい特殊函数を定義する非線型非自励の方程式としてパンルヴェ方程式を提案したのである。

同じ頃、パンルヴェ方程式は、線型微分方程式の変形理論にも現れた。これは、R. フックスの研究である。4つの特異点を持つフックス型方程式が、モノドロミーを変えずに特異点の位置を動かすときに、方程式の係数が満たす方程式が第6パンルヴェ方程式である。このような方程式の変形を、一般に、モノドロミー保存変形と呼んでいる。この視点は、後述する最近の超越解の構成にも、重要な視点を与えている。

さらに、パンルヴェの方程式は、1970年代のWu氏らによる可解格子模型の相関函数の記述などに数理物理への応用を見出した。純粋に数学的な動機から構成されたパンルヴェ方程式が、物理学の重要な問題への解答を与えたことは驚きをもって迎えられた。数学においても、岡本和夫氏による初期値空間の構成、アフィン・ワイル群対称性の定式化、更に、梅村浩氏の微分ガロア理論を用いた既約性の証明と盛んに研究されてきた。

最近、2012年以降、パンルヴェ方程式の研究環境は非常に変わった。パンルヴェ方程式の超越解の具体的な表示がLisovyy氏らによって得られ、それが重要な意味を持つということが分かってきたからである。この具体的な表示というのは、パラメーターに関するフーリエ級数展開の形で与えられ、その係数はヤング図形の組によってラベルづけされるネクラソフ因子と呼ばれる式によって書いてしまう。これまでの研究は、特殊函数の研究というよりは特殊方程式の研究であるという側面は否めず、解そのものの解析という面では、一部そのような研究はあったものの、十分ではなかったと言えるだろう。それがここに来て、大きな環境の変化に至りそうだということである。

2. 研究の目的

本研究課題では、非線型系の中でも可積分系の重要なクラスであるパンルヴェ方程式とその様々な拡張をテーマとしている。パンルヴェ方程式の拡張としては、多変数化、高次元化、離散化を念頭に置いている。

具体的な目標として、離散パンルヴェ方程式の超越会の構成と、線型 q 差分方程式の変換理論の構築をあげる。

一つ目の目標に関しては、パンルヴェ微分方程式の超越解に関するLisovyyらの理論を理解することから始める。実際、具体的に与えられた函数が方程式の解になっていることすら、証明が必要で(現在3種類の証明が与えられている)、単に代入するだけで解であることが確かめられるというものではない。その上で、研究代表者と神保氏との共同研究で提案された q PVIと呼ばれる q 差分パンルヴェ方程式に関して同様の理論を構築することを目標として挙げた。ちなみに、離散パンルヴェ方程式は、アフィンルート系に対応した有理曲面に対応させることで分類されている。この方程式は、 A_3 型の曲面に対応している。対称性の言葉を使って分類する流儀もあるが、その場合は D_5 型に対応している。

さらに、これと関連して、微分方程式の場合に近年活発に研究されている変換論を使った方程式の分類理論の、線型 q 差分方程式への拡張を目的の1つとする。微分方程式の分類理論と言っているのは、剛性指数と呼ばれる数を固定したとき、中間畳み込みという変換によって方程式が高々有限個の型の方程式に帰着できるという理論で、元々フックス型方程式に関して展開された理論であるが、最近ではフックス型でない場合にも拡張されている。これを、線型 q 差分方程式にも拡張したいということである。

3. 研究の方法

(1) アイディアを思いつくための数学的対象に関する思考実験、計算、文献調査、(2) 共同研究者との議論、アイディアの交換、(3) 国内外の研究者たちとの交流、議論。とくに、セミナー、研究集会などに多く参加すること。人に話をすること、人の話を聞くこと。

研究目的を達成するにあたり、国内外の研究者との研究交流を最も大事なものと考えている。国内外の研究集会に参加することなども含め、とくに若手研究者間の共通の問題意識の交換をはかり、柔軟な研究手法で研究を遂行することを目指す。

4. 研究成果

(1) まず、神保氏、名古屋氏との共同研究で、 q パンルヴェ方程式の超越解を構成し、論文として学術誌に発表した。

第6 パンルヴェ微分方程式の場合、与えられた級数が実際に解になるということの証明は、モノドロミー保存変形を満たす線型方程式の解を構成する方法、超対称ヴィラソロ代数の表現から双線型方程式を示す方法、積分方程式の解をフレッドホルム行列式を使って構成する方法の、少なくとも3種類が知られている。それらのうち、1つ目の証明は、モノドロミー保存変形の変形方程式系の解を5点共形ブロックを使って構成し、その展開から解を求めるという方法であった。今回の q 差分パンルヴェ方程式の解の構成は、この理論の q 差分類似である。

元の証明には、ヴィラソロ代数の表現論が重要な役割を果たしているのであるが、 q 類似の場合には、対応する gl_1 量子トロイダル代数、あるいは Ding-庵原-三木代数と呼ばれるものが現れる。しかし、現在のところ、表現論がヴィラソロ代数ほどには整備されておらず、いくつか元の証明の議論がそのままでは使えない部分があり、その部分は解の具体的な表示を使った組み合わせ的な議論で置き換えて証明が完成した。

この解の表示式には、AGT 対応と呼ばれる共形場理論とゲージ理論との間の対応が関係しており、その意味でも興味深い結果であると思われる。また、 q を 1 に近づける極限をとることで、もとの、Lisovyy らのパンルヴェ微分方程式の級数解が復元される。

とりあえず研究は一区切りついたのだが、解の表示が得られたことで、研究は次のステージに移行していくように思う。楕円函数や超幾何函数の次の特殊函数として導出されたパンルヴェ方程式は、1 世紀もの間、一般の解の具体的な表示なしにその研究が続けられてきた。ここに来て、ようやく楕円函数や超幾何函数の一般化としての研究が始まるという気がする。次のステージでは、パンルヴェ超越函数の特殊函数的な様々な性質を示すことから、手探りで研究していきたい。

(2)線型 q 差分方程式の分類理論に関しては、山口氏との共同研究を、論文として学術誌に発表した。

この論文は、線型方程式を分類する際の指針となるスペクトル型の定義を、 q 差分方程式の場合にも行い、さらに中間畳み込みというジャクソン積分を使った方程式の変換を定義し、その変換がしかるべき性質を持っていることを示したものである。示した性質というのは、変換がフックス型方程式をフックス型方程式に移すこと、既約性を保つこと、剛性指数を保存することの3つである。

この内容は、構想している分類理論において、最初の一步となる部分にすぎない。このような変換で移りあうものを同一視した際に、全体としてどのような分類が得られるのかに興味がある。微分方程式の場合との類比で考えると、これが高次元離散パンルヴェ方程式の分類に繋がると考えられるからである。未だ、その全体像がどのようなものになるのかは分かっていないのだが、現在できている部分だけでも論文誌に公表できたのはよかったと思う。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

1 H. Sakai and M. Yamaguchi, "Spectral types of linear q -difference equations and q -analog of middle convolution", Int. Math. Res. Not. (2017) 1975-2013

DOI: 10.1093/imrn/rnw089

2 M. Jimbo, H. Nagoya, and H. Sakai, "CFT approach to the q -Painleve VI equation", J. Integrable Syst. (2017) xyx009, 27 pp

DOI: 10.1093/integr/xyx009

〔学会発表〕(計 7 件)

1 坂井秀隆, "Discrete Painleve Equations", Differential and Difference Equations, Laboratoire Paule Painleve, Lille, France, 2015 年 10 月

2 坂井秀隆, "Discrete Painleve Equations", Joint Mathematics Meetings, Washington State Convention Center, Seattle, USA, 2016 年 1 月

3 坂井秀隆, "A rigid, irreducible Fuchsian linear q -difference equation can be reduced to a 1st order equation by integral transformations", Painleve Equations and Discrete Dynamics, BIRS, Banff, Canada, 2016 年 10 月

4 坂井秀隆, "A rigid, irreducible Fuchsian linear q -difference equation can be reduced to a 1st order equation by integral transformations", 複素領域における関数方程式とその周辺, 広島大学, 東広島市, 2017 年 3 月

5 坂井秀隆, "A rigid, irreducible Fuchsian linear q -difference equation can be reduced to a 1st order equation by integral transformations", 25th International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries, Czech Technical University, Prague, Czech, 2017 年 6 月

6 坂井秀隆, "Ordinary differential equations on rational elliptic surfaces", Integrable systems, symmetries, and orthogonal polynomials, ICMAT, Madrid, Spain, 2017 年 9 月

7 坂井秀隆, "CFT approach to the q -Painleve equations (joint work with M. Jimbo and H.

Nagoya) ” , Asymptotic, Algebraic and Geometric Aspects of Integral Systems, TSIMF, Sanya, China, 2018年4月

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/sakai.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。