

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04898

研究課題名(和文) 時間変数の係数をもつ線形偏微分方程式の発散級数解のボレル総和法とその応用

研究課題名(英文) Borel summability of divergent power series solutions to linear partial differential equations with time dependent coefficients and its applications

研究代表者

市延 邦夫 (Kunio, Ichinobe)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：20434417

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：複素線形偏微分方程式について(1) 時間変数の多項式係数を持つ方程式の局所正則初期値問題の発散級数解がボレル総和可能であるための十分条件を、初期値に対する大域的増大度によって与えた。(2) 初期値が大域正則な場合に、制限付き典型的方程式の発散級数解がボレル総和可能であるための必要十分条件を与えた。

典型的な q -差分微分方程式の初期値問題の形式級数解について(3) 収束するための必要十分条件、発散する場合に、発散解の漸近解の存在、そして、漸近解の一意性、すなわち、発散解のボレル総和可能性を特徴付けた。(4) 初期値が大域正則な場合に、発散解のボレル総和可能性を特徴付けた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複素領域における線形偏微分方程式の初期値問題に現れる発散級数解のボレル総和可能性の問題について、定数係数の場合は一応の決着を見ている。しかし、変数係数の場合はほとんど行われていなかった。本研究で得られた成果は、時間変数の多項式係数という制約がついているが、一般の変数係数の場合の解析に向けた大きな一歩となるものと考えられる。また、偏微分方程式の q -類似の結果を応用することにより、偏微分方程式の問題を進展することが出来たことは、 q -類似を考えることの意義が大きいことを意味する。

研究成果の概要(英文)：We considered linear partial differential equations in the complex domain, and obtained the following results. (1) We treated the local holomorphic Cauchy problem of partial differential equations with time dependent polynomial coefficients, and gave a sufficient condition that divergent power series solutions are k -summable in term of the global exponential growth estimate of the Cauchy data. (2) We treated the entire Cauchy problem of typical equations with some restriction, and gave a characterization of k -summable formal solutions.

We considered the Cauchy problem of typical q -difference-differential equations. (3) We gave a necessary and sufficient condition for the convergence of formal solutions. When the formal solutions diverge, we showed the existence and uniqueness of the asymptotic solutions. (4) When the Cauchy data is entire, we gave a characterization of k -summable formal solutions.

研究分野：偏微分方程式

キーワード： k 総和法 ボレル総和法 q -差分微分方程式 初期値問題 発散級数 漸近解析

1. 研究開始当初の背景

複素領域における常微分方程式において、不確定特異点周りの発散級数解は無条件で多重(ボレル)総和可能であることが証明された後、ボレル総和法が偏微分方程式に応用されたのは Lutz-Miyake-Schäfke(1999)による複素熱方程式の初期値問題に現れる発散級数解に対してである。彼らはそこで偏微分方程式に現れる発散級数解は無条件では(多重)ボレル総和可能ではないことを指摘した。その後、複素熱方程式に代表される定数係数の非コワレフスキ型線形偏微分方程式の初期値問題に現れる発散級数解は初期値に対する大域的増大条件の下で(多重)ボレル総和可能であることが知られていた(Miyake, World Sci. Publ., Wuhan, 1999, Balser, J. Diff. Eqns 2004 など)。定数係数の方程式に対して、変数係数の方程式における同様の問題はほとんど手がつけられていなかった。

そんな中、研究代表者(RIMS Kokyuroku Bessatsu, 2013, J. Diff. Eqns, 2014)は時間変数の単項式係数方程式の初期値問題に現れる発散級数解に対して、定数係数方程式と同様に初期値に対する大域的増大条件の下でボレル総和可能であることを証明した。この結果は、時間変数に限ったことではあるが、変数係数方程式に現れる発散級数解のボレル総和法への道を切り開くものであった。また、初期値が大域正則である場合、発散級数解の発散の度合いが小さくなり、別の位数のボレル総和法が考えられる。Miyake-Ichinobe(2004)は典型的な定数係数方程式の大域正則初期値問題に現れる発散級数解のボレル総和可能性を、局所正則初期値問題の場合と同じ条件である初期値に対する大域的増大条件で特徴付けた。しかし、変数係数偏微分方程式に対する大域正則初期値問題に現れる発散級数解のボレル総和可能性の問題は全く扱われていなかった。

Tahara-Yamazawa(2013)では一般的な変数係数線形偏微分方程式に対して、発散解が多重ボレル総和可能であることを無条件下で証明した。この結果は偏微分方程式の主要部が常微分方程式であるがゆえ、無条件で発散解がボレル総和可能であることが示されている。それゆえ、真なる偏微分方程式に対する結果が望まれている。

これらの結果を踏まえて、本研究では、2013,2014の研究代表者の結果を拡張すること、また、初期値が大域正則である場合の結果を得ることを目的とし、変数係数偏微分方程式に現れる発散級数解のボレル総和可能性の問題に本質的な進展をもたらす事を目指した。

2. 研究の目的

時間変数の係数を持つ線形偏微分方程式の初期値問題に現れる発散級数解が(多重)ボレル総和可能であるための十分条件を与え、変数係数方程式に現れる発散級数解のボレル総和法の礎とすることを目標とした。また、初期値が大域正則の場合、発散級数解の発散の度合いが小さくなり、別の位数のボレル総和法が考えられるため、並行して進めていく。これらの問題の考察を通じて、変数係数線形偏微分方程式に現れる発散級数解のボレル総和可能性の問題の本質に迫る。

3. 研究の方法

研究の方法は大きく次の2つからなる。1: 与えられた変数係数線形偏微分作用素に対して一意に決まる発散級数解の発散の度合いを表すジュブレイ位数とは違う不変量である、モディファイド・オーダー(M.O.)を用いた逐次近似法を用いることにより、形式級数解を構成する。2: 偏微分方程式論における発散級数解のボレル総和法の問題を偏微分方程式に付随する常微分方程式に対する同じ問題に帰着して考える。

具体的には、時間に関する m 階変数係数偏微分方程式を考えると、各作用素 $t^i \partial_t^{m-j} \partial_x^k$ に対して数 $k-(i+j)$ を対応させ、その数を各作用素に対する M.O. と呼ぶ。係数が 0 でない全ての作用素に対する M.O. の最大値を方程式の M.O. と呼ぶ。方程式の M.O. を基準にし、各作用素に対する M.O. に応じた逐次偏微分方程式を考える。このときその逐次近似形式解は、その係数が初期値の導関数の単項式で与えられる形式級数解となる。その形式級数解に対して形式的にコーシーの積分公式を適用すると、初期値とある核関数(一般には発散級数)との合成積で表される。その核関数は逐次偏微分方程式に付随する常微分方程式を満たす。それゆえ、偏微分方程式の問題を常微分方程式に帰着することができる。各逐次偏微分方程式に付随する常微分方程式から核関数のボレル像が満たす大域的増大条件を得、結果、元の方程式の発散級数解のボレル総和可能なための十分条件を得ることが出来る。

4. 研究成果

(1) 時間変数多項式係数を持つ高階線形偏微分方程式の局所正則初期値問題に現れる発散級数解がボレル総和可能であるための十分条件を、初期値に対する大域的増大条件として与えた。このことは、与えられた偏微分作用素から得られる方程式の M.O. を基準にした逐次近似法と、偏微分方程式のボレル総和法の問題に対してその逐次偏微分方程式に付随して得られる常微分方程式のボレル総和法の問題へ帰着した事が有効に発揮したと考えられる。また、正規型方程式に

対する結果だけでなく、非正規型方程式に拡張した結果を得た。この結果は上智大学名誉教授の田原秀敏氏との共同研究である。非正規型方程式を扱うことで、正規型方程式を扱っているだけでは気が付かなかった、より見通しの良い結果を得ることができた。

(2) 未解決であった初期値が大域正則である場合の熱方程式の初期値問題に現れる発散級数解がボレル総和可能なための初期値の属する関数空間の1つを与えた。この結果は名古屋大学名誉教授の三宅正武氏との共同研究である。具体的には、初期値が大域正則である場合、これまでに熱方程式の初期値問題の発散級数解がボレル総和可能であるための十分条件は得られていなかった(偏微分作用素 $\partial_t^p - \partial_x^q$ において空間微分 ∂_x の階数 q と時間微分 ∂_t の階数 p の差が2以上の場合には発散級数解がボレル総和可能であるための十分条件はすでに得られているが、差が1の場合の偏微分作用素に対しての結果は得られていなかった)。しかし、実験的な観点から初期値の満たすべき条件を見つけ、ボレル総和可能なための初期値の属する関数空間を得た。ここで、この関数空間は空集合ではない事を注意しておく。さらに、初期値がその関数空間に属する場合、ボレル和は熱核と初期値との合成積で与えられる事を示した。このことから、初期値の属する関数空間によらず、熱方程式の一意解(ここではボレル和)の積分表示はいつも熱核と初期値との合成積で与えられ、他の表示で表される解は全て熱核と初期値との合成積と一致すると予想している。

(3) 偏微分方程式において、時間微分を q -類似化した q -差分微分方程式に現れる発散級数解について、大学院生(当時)の安達駿弥氏と共同研究を行った。典型的な定数係数 q -差分微分方程式の局所正則初期値問題に現れる形式級数解に対して、形式級数解が収束するための必要十分条件、発散する場合に発散級数解の漸近解の存在、そして、漸近解の一意性、すなわち、発散級数解がボレル総和可能であるための必要十分条件を初期値に対する大域的増大条件として与えた。ここで扱った方程式に対して、 $q \rightarrow 1$ の極限をとると、典型的な定数係数偏微分方程式が得られる。その極限偏微分方程式に対する同じ問題の結果はすでに得ている。これらの結果を極限操作という観点から眺めてみると、方程式は極限操作で移行するが、結果は極限操作で得られない、という現象を得た。方程式、結果ともに極限操作で移行すると思われるが、その期待を裏切ってくれたのは面白いと考えている。あとはそのギャップの現れた理由を解析的に説明するという問題が残されている。

(4) (3)で得られた総和法の結果を初期値が大域正則である場合に拡張した。具体的には典型的な定数係数 q -差分微分方程式の大域正則(整関数)初期値問題に現れる発散級数解がボレル総和可能であるための必要十分条件を与えた。正確には、形式級数解が収束するための必要十分条件は初期値が位数1の指数増大条件を満たす整関数であることが(3)で得られている。したがって、初期値が位数1より大の指数増大条件を満たす整関数であることを仮定する。このとき、発散級数解がボレル総和可能であるための十分条件を、初期値が局所正則である場合の発散級数解のボレル総和可能なための十分条件と同じ条件で与え、その条件が“広義”ボレル総和可能であるための必要条件であることも示した。ここで、ボレル総和法とは一方向に対する概念であるが、区間に対する概念に広げたものを“広義”ボレル総和法と呼ぶことにした。したがって、広義の意味で発散級数解がボレル総和可能であるための特徴づけを与えた。

この結果を注意深く眺めてみることにより、初期値が位数 (>1) の指数増大条件を満たす整関数であるという仮定の下、初期値が複素平面上いくつかの方向ではより小さい位数の指数増大条件を満たしていれば、実は全平面で位数 1 の指数増大条件を満たす整関数であるという関数論的結果を示すことが出来た。ただし、 q と 1 は無関係ではなく、ある不等式を満たす関係にある。正確には、 q と 1 に依存するいくつかの方向との関係である。

また、 q -差分微分方程式に対して得られた結果を応用して、 $q \rightarrow 1$ の極限で得られる偏微分方程式に対しても同様な結果を得ることが出来た。これは、Miyake-Ichinobe(2004)の結果の一部の拡張を与えたことになった。ただし、(3)で述べたようにその結果は極限操作で得られる結果ではなく、同様の解析を行うことによって得られた結果である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kunio Ichinobe	4. 巻 256
2. 論文標題 On the k-summability of formal solutions for a class of higher order partial differential equations with time-dependent coefficients	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 27-45
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kunio Ichinobe and Shunya Adachi	4. 巻 -
2. 論文標題 On k-summability of formal solutions to the Cauchy problems of some linear q-difference-differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Complex Differential and Difference Equations, De Gruyter Proceedings in Mathematics	6. 最初と最後の頁 447-464
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kunio Ichinobe	4. 巻 -
2. 論文標題 Gevrey Asymptotic Solutions to the Cauchy Problem of Some Linear q-Difference-Differential Equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kunio Ichinobe	4. 巻 1
2. 論文標題 On k-summability of formal solutions for certain higher order partial differential operators with polynomial coefficients	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics	6. 最初と最後の頁 351-368
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-319-52842-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ichinobe, Kunio	4. 巻 2020
2. 論文標題 k-summability of formal solutions for certain partial differential equations and the method of successive approximation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 35-49
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 On k-summability of formal solutions to the Cauchy problem of some linear q-difference-differential equations
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 A necessary condition for k-summability of formal solutions to some linear q-difference-differential equations
3. 学会等名 Complex Differential and Difference Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 Characterization of k-summability of formal solutions to some q-difference-differential equations
3. 学会等名 Various Problems of Algebraic Analysis -- Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis -- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 On k-summability of formal solutions for a class of higher order partial differential operators with time dependent coefficients
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of diff. Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe, Masatake Miyake
2. 発表標題 Experimental observation on k-summability of divergent solutions of the heat equation with $k > 1$
3. 学会等名 Microlocal analysis and asymptotic analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe, Masatake Miyake
2. 発表標題 Experimental observation on the k-summability problem of divergent solutions of the heat equation with entire function Cauchy data
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe, Masatake Miyake
2. 発表標題 On the k-summability of divergent solutions of the heat equation with entire function Cauchy data
3. 学会等名 複素領域における関数方程式とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 k-summability of formal solutions for certain partial differential equations with time dependent polynomial coefficients
3. 学会等名 Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 k-summability of formal solutions for certain partial differential equations and the method of successive approximation
3. 学会等名 Algebraic analytic methods in complex partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 The divergent power series solutions of partial differential equations on the complex domain and its k-summability
3. 学会等名 Partial Differential Equations: General Theory and Variational Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kunio Ichinobe
2. 発表標題 k-summability of divergent solutions to some linear q-difference-differential equations with entire Cauchy data
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Functional Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

愛知教育大学研究者総覧
<http://souran.aichi-edu.ac.jp/profile/ja.75c1d9cc26491894b07031094a0c261d.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----