

令和元年6月5日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04901

研究課題名(和文) 等質開凸錐と等質ジーゲル領域の多角的研究

研究課題名(英文) Various studies of homogeneous open convex cones and homogeneous Siegel domains

研究代表者

野村 隆昭 (Nomura, Takaaki)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：30135511

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 等質開凸錐の実現：重み付き向き付けグラフ (weighted oriented graph) を援用して、任意の等質開凸錐を正定値実対称行列の部分錐を貼り合わせるによって実現した。この成果を踏まえて、基本相対不変式の次数によって、既約対称錐を特徴付ける定理を得た。

(2) 古典解析におけるHobsonの公式の証明の現代化：この公式は1894年にHobsonにより発表されたものであるが、その証明は技術的で大変わかりにくい。研究代表者の野村はLie代数的な手法を取り入れて簡明な証明を与えることに成功し、学術論文として発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

等質開凸錐の理論は Vinberg に始まり、Koecher, Dorfmeister, Rothaus 等の研究者によって、理論的な整備がなされてきた。しかしながら、どの論文も難しく、とくに非専門家にとっては、等質開凸錐は明示的に記述される基本的な領域であっても、容易には近づけない対象であった。本研究成果はこの現状を打開し、等質開凸錐を応用する研究者に容易なアプローチの道を開くとともに、群作用のない等質開凸錐への一般化を図ることができると期待されるものである。

オイラー作用素とラブラシアンとの交換関係を用いたHobsonの公式の証明は、すでにDunkl解析への応用がなされている。

研究成果の概要(英文)：(1) Realization of homogeneous open convex cones: With the help of weighted oriented graphs, I realized any homogeneous open convex cones by stapling subcones of positive-definite real symmetric matrices. Based on this result, we got a characterization of irreducible symmetric cones by means of the degrees of the basic relative invariants.

(2) Modernization of the proof of Hobson's formula: This formula is found by Hobson in 1894, but his proof is too technical to understand. I have succeeded in giving a clearer proof by adopting a Lie-algebraic method, and published an academic paper.

研究分野：非可換調和解析学

キーワード：等質開凸錐 正定値対称行列 左対称代数 向き付けグラフ ホブソンの公式 クラン 球面調和関数  
リー群の表現

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 複素 Siegel 領域は, 1957 年に Piatetski-Shapiro によって導入されたもので, 複素上半平面の高次元・行列空間への一般化であり, 有界領域に正則同相となる. これによって, 1935 年の論文で E. Cartan が提示した問題「 $n = 4$  のとき,  $\mathbb{C}^n$  に非対称な等質有界領域が存在するか」に肯定的な解答が与えられた. 実際には, その後の研究によって,  $n = 7$  の場合には, 互いに同値ではない非対称な Siegel 領域が連続濃度で存在することが示されている. また, 等質開凸錐の理論は Vinberg による 1963 年の論文で基礎が置かれ, こちらも 11 次元以上ならば, 互いに線型同型ではない連続濃度の非対称な等質開凸錐が存在する.

(2) 等質 Siegel 領域と等質開凸錐の幾何学的構造の研究は, 1970・80 年代に飛躍的に発展したものの, 解析学に関しては, その特別の場合である対称錐や Hermite 対称空間の範囲を越えてしまうと, 明示的に記述できる等質領域上の解析学として, 追求すべき所がまだ数多く残っている. 一方で, 研究代表者の野村は, 対称領域の持つ端正さを解析学的に際立たせる研究を 2000 年度以来続けてきており, 順調に成果を挙げてきた.

(3) さらに研究協力者の伊師との研究では, 双対錐とは線型同型であるが, 自己双対でない階数が 3 以上の既約な等質開凸錐の例も発見している.

(4) ユークリッド型ジョルダン代数  $V$  とその自己共役表現  $(\cdot, E)$  があつたとき,  $V_E := V + E$  には自然にクランの構造が入る.  $E$  が零空間でない限り, すなわち  $V_E$  が零表現でない限りクラン  $V_E$  は単位元を持たないので, その場合は単位元を付加することにより, 単位元を持つクランを得る. このクランには, 一般に非対称な等質開凸錐が対応する. この等質開凸錐に付随する基本相対不変式の明示的な記述を 2013 年の中島秀斗との共著論文で得ている. またその双対クランに付随する基本相対不変式の明示的な記述も得ている. 後者では, 基本相対不変式の次数が公差 1 の等差数列をなすような非対称な等質開凸錐を系統的に提供することにもなっていることを中島秀斗との 2014 年の共著論文で示している.

### 2. 研究の目的

(1) 等質 Siegel 領域と等質開凸錐について, 研究代表者の野村, および研究協力者の伊師が過去 15 年以上にわたって, 単独あるいは共同で得てきた研究成果を踏まえ, 代数・幾何・解析など様々な手法を駆使して, より総合的な観点から多角的に研究を行う. 等質 Siegel 領域については, 複素領域だけではなく, 実領域までも研究対象を広げる. 等質 Siegel 領域や等質開凸錐のカテゴリーには対称空間になるものも含まれていて, 研究開始当初の背景(1)で述べた歴史的経緯からしても, 極めて重要な研究対象である.

(2) しかしながら, 実等質 Siegel 領域一般, あるいは等質開凸錐一般, というのは現時点ではあまりにも茫洋とした研究対象であり, 対称領域のときのような精緻で興味深い研究成果を産み出していくには, 十分にリッチな代数構造を持ち, 非対称領域といえども対称性に近い幾何学的性質を持つようなクラスを抜き出す必要があることが, これまでの野村の研究から, 失敗の経験も含めて, わかっている. したがって, 対称錐に近い構造を持つ非対称な等質開凸錐や等質ジエゲル領域を体系的に抽出する方法を見つけることは大変意義深い研究であると考えられる.

### 3. 研究の方法

(1) 等質開凸錐がどれだけ対称錐に近いかを見定める一つの基準として, 基本相対不変式の次数のなす有限数列がある. 対称錐の場合は, 基本相対不変式の次数が公差 1 の等差数列をなしている. ただし, このことだけでは対称錐を特徴付けないことは, すでに, 研究開始当初の背景(4)で述べた. そこで, 双対錐まで考えて, 与えられた等質開凸錐だけではなく, 双対錐においても, 基本相対不変式の次数が公差 1 の等差数列をなすと対称錐ではないかという, 2006 年の渡辺有介の京都大学修士論文で挙げられた積年の予想の決着をはかった.

(2) 国内外の研究集会に出かけて, 研究発表や研究討議を重ねる. 2015 年度は, 10 年来研究交流を続けてきたルーマニアの Iordanescu 教授や Nichita 教授を訪ねて研究討議を行なった. また 2009 年以来隔年でワークショップを共同で開催してきたチュニジアの Baklouti 教授とは, 2015 年, 2017 年にも引き続きワークショップを開催した. このワークショップにはフランス等ヨーロッパの国々からも研究者の参加があり, 本研究課題の進展に資するところが大きい.

また 2000 年以来, 研究交流を続けてきたシンガポール国立大学の Zhu Chen-Bo 教授を訪ねて, 対称空間上の調和解析や半単純リー群の表現論に関する研究討議を重ねて, 本研究課題の進展をはかった.

(3) 2016 年はポーランドの Bedlewo Banach Center で開催された Sophus Lie 研究集会 50 周年記念会に参加し, 講演者および参加者と研究討議を行なって, 研究課題のより一層の進展をはかった. とくに, 講演者の Vinberg 教授とは積極的に討議を重ねて, 研究課題に関していくつかの助言を得た.

(4) 2017 年はオランダの Lorentz センター, フランスの CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) において, 概説講演を依頼された. Lorentz center では, Jordan 代数と対称錐に関する講演. CIRM では等質開凸錐の野村や研究協力者による最新の研究成果に関する講演であったが, どちらにおいても, 参加者との研究討議を積極的に行なって, 本研究課題の新たな方向への進展についてのヒントを得ている.

(5) ハンガリーの Bolyai 研究所 (Szeged) に Molnar 教授を訪ねて, 本研究課題の研究成果を同

教授が主催するセミナーで発表し、討論を行なった。これは論文執筆に向けての良い準備となった。

#### 4. 研究成果

##### (1) 一般の等質開凸錐の実現

2011年の山崎貴史の九州大学修士論文「等質開凸錐の行列による実現」の内容を大幅に拡張・洗練化し、重み付き向き付けグラフ (weighted oriented graph) を援用することで、一般の等質開凸錐の実現を得ることに成功し、私との共著論文として学術論文[4]を発表した。この論文では、非結合的行列代数である  $T$  代数や、結合的ではあるがかなり特殊な存在の  $N$  代数によるアプローチをやめることにして、数理物理等で用いられてきた左対称代数によって、等質開凸錐の理論の基礎部分をまとめなおすも行なっている(下記(2)も参照)。この左対称代数は、Vinberg の1963年の論文ではクランと呼ばれているものである。この成果は、この研究を始める前の、伊師英之や中島秀斗との共同研究あるいは彼ら自身の研究成果をさらに発展させたものであり、最終的な結論は、Vinberg が1960年の速報において最初に挙げた5次元の非対称な等質開凸錐の記述をそのまま一般の等質開凸錐にまで拡張する形になっている。得られた成果で最も著しい点は、難しい部分は定理の証明部分のみであって、等質開凸錐の実現の際の手続きの簡明化に成功していることである。このことにより、等質開凸錐への非専門家のアクセスも容易になっている。この結果を応用することにより、一般の等質開凸錐の行列実現 --- 正定値実対称行列のなす凸錐のスライスとしての実現 --- において、最小の行列サイズのもの自然な形で得られることもわかった。最小の行列サイズは、すべて等質開凸錐から描かれる重み付き向き付けグラフの情報から記述できて、公式も得られた。現在、学術論文として執筆中である。

##### (2) 等質開凸錐の基礎理論の整備

等質開凸錐の基礎理論については、1963年のVinbergの論文で確立されてはいるのであるが、実はその論文において論証にギャップが認められる箇所がある。そのギャップを幾何学的手法で埋めたのが Koszul であり、また Rossi-Vergne は解析的手法で埋めてきた。本研究では、野村自身の研究成果や伊師英之・中島秀斗らによる研究成果を踏まえて、元々のVinbergの論文の精神に基づき、クランとその双対クランを同時に扱う帰納的方法で直接の代数的証明を与えることに成功した。この成果は数学的な大道具を用いずに等質開凸錐の理論の基礎部分を補強するものであり、(1)による成果と相俟って、等質開凸錐の理論へのアプローチを非専門家に対して容易にし、とくに統計学等への応用にも道を開くと期待できる。(1)に引き続いて学術論文としてまとめる予定である。

##### (3) 古典解析における Hobson の公式の証明の現代化：その応用と発展

定数係数の偏微分作用素が radial な関数にどのように作用するかを記述する Hobson の公式は1894年に発表されたものであるが、その証明は大変技術的でわかりにくいものであった。本研究では、Euler 作用素と Laplacian の交換関係を用いることによって、構造化された大変簡明な証明を与えることに成功し、学術論文[1]を発表した。著書[1] (球面調和関数と群の表現) では、この Hobson の公式を前面に押し出すことによって、球面調和関数の古典的理論、Gelfand 対、そして双対ペアの観点からの議論を、従前よりも見通しよく展開した。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計4件)

[1] T. Nomura, A proof of Hobson's formula with the Euler operator, *Kyushu J. Math.*, 査読有, **72** (2018), 423-427.

DOI: 10.2206/kyushujm.72.423

[2] T. Yamasaki and T. Nomura, A characterization of symmetric cones by the degrees of basic relative invariants, *Kyushu J. Math.*, 査読有, **70** (2016), 237-257.

DOI: 10.2206/kyushujm.70.237

[3] 山崎貴史, 野村隆昭, Realization of homogeneous cones through oriented graphs, 数理解析研究所講究録, 査読無, **1977** (2015), 16-22.

[4] T. Yamasaki and T. Nomura, Realization of homogeneous cones through oriented graphs, *Kyushu J. Math.*, 査読有, **69** (2015), 11-48.

DOI: 10.2206/kyushujm.69.11

〔学会発表〕(計11件)

[1] Takaaki Nomura, Minimum size matrix realization of a homogeneous cone, "Analysis Seminar". 5 February 2019, Bolyai Institute (Hungary).

[2] 野村隆昭, Hobson の公式とその応用, 「表現論ワークショップ」. 2018年1月6日, 鳥取市.

[3] 野村隆昭, Homogeneous open convex cones: recent results, 「行列解析の展開」. 2018年2月15日, 名古屋大学.

[4] Takaaki Nomura, Homogeneous open convex cones: recent results, "Mathematical Methods of Modern Statistics". 11 July 2017, Centre International de Rencontres Mathematiques

(France).

[5] Takaaki Nomura, Introductory talk regarding Jordan algebras and symmetric cones, “Order Structures, Jordan Algebras, and Geometry”. May 30 2017, Lorentz Center (the Netherlands).

[6] Takaaki Nomura, Realization of homogeneous open convex cones, “Seminar on Representation Theory and Number Theory”. 30 March 2017, National University of Singapore.

[7] Takaaki Nomura, Determinantal expressions of Bernoulli numbers, 「表現論ワークショップ」. 2017年1月9日, 鳥取市.

[8] Takaaki Nomura, Optimal matrix realization of homogeneous cones, “Geometry, Representation Theory, and Differential Equation”. 16 February 2016, Kyushu University.

[9] 山崎貴史, 野村隆昭, 向き付けグラフを介して等質開凸錐を具現化する, 2015年度日本数学会秋季総合分科会. 2015年9月14日, 京都産業大学.

[10] Takaaki Nomura, Realizing homogeneous cones through oriented graphs, “The 8<sup>th</sup> Congress of Romanian Mathematicians”. 1 July 2015, University of Iasi (Romania).

[11] 山崎貴史, 野村隆昭, Realization of homogeneous cones through oriented graphs, 数理解析研究所研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」. 2015年6月24日, 京都大学数理解析研究所.

〔図書〕(計3件)

[1] 野村隆昭, 球面調和函数と群の表現, 日本評論社, 2018年7月, 376pp.

[2] Ali Baklouti and Takaaki Nomura (Eds), Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications: TJC 2015, Monastir, Tunisia, December 18-23, Springer, February 2018, 234pp.

[3] 野村隆昭, 複素関数論講義, 共立出版社, 2016年8月, 278pp.

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/>

## 6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

(2)研究協力者

研究協力者氏名：伊師英之

ローマ字氏名：ISHI Hideyuki

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。