

令和元年5月16日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04906

研究課題名(和文) 新しい不動点理論と凸解析学を用いた非線形関数解析学の構築と非線形問題の究明

研究課題名(英文) The Study of Nonlinear Functional Analysis and Nonlinear Problems Based on New Fixed Point Theory and Convex Analysis

研究代表者

高橋 渉 (TAKAHASHI, Wataru)

慶應義塾大学・自然科学研究教育センター(日吉)・訪問教授

研究者番号：40016142

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、これまでの研究でわき起こった重要で新たな非線形問題を、関数解析学を基礎にした非線形問題として捉え、その問題を、斬新で且つ統一的な新しい不動点理論と凸解析学の立場から研究し、不動点の研究では、不動点を拡張した吸引点の概念を導入して、凸性を仮定しない吸引点の存在定理や平均収束定理を証明し、医学、工学、経済学の分野で重要な逆問題の研究では、その問題を数学的に捉え、それを解決するための弱収束定理や強収束定理を証明するなど、新しい非線形関数解析学を構築するとともに、それらの定理を種々の非線形問題の解決に応用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的独自性と創造性は、非線形関数解析学と非線形問題、特に逆問題、非線形最適化や均衡問題、平均収束の問題、微分方程式の問題を、新しくつくられた不動点理論と凸解析学の立場から捉え、それを通してこれまでの理論よりも優れた非線形関数解析学の理論を構築するとともに、それらの非線形問題への直接的解明にあたったものである。凸解析学でのアイデアや、種々の不動点定理を駆使して、数学、医学、工学、経済学等で重要な逆問題、非線形最適化や均衡問題、平均収束定理の問題、微分方程式等の問題が解明でき、さらには像再生の問題や制約問題などにも応用できた。この研究による結果とその意義は大いにありとおもう。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied nonlinear functional analysis and nonlinear problems by using new fixed point theory and convex analysis. We at first introduced the concept of attractive points of nonlinear mappings in Hilbert spaces and Banach spaces and then proved the existence of attractive points and mean convergence theorems. In the study of inverse problem which is important in medical science, engineering, economics and so on, we proved weak convergence theorems of Mann's type iteration and strong convergence theorems of Halpern's type iteration in Hilbert spaces. We also obtained strong convergence theorems by the hybrid method in Banach spaces. Furthermore, we proved weak and strong convergence theorems for semigroups of not necessarily continuous mappings in Hilbert spaces and Banach spaces. Using these theorems, we solved nonlinear problems which are important in many areas of applied mathematics.

研究分野：非線形関数解析学とその応用

キーワード：非線形関数解析学 凸解析学 不動点理論 最適化理論 非線形作用素 均衡点問題 不動点アルゴリズム ハンツハ空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形最適化や均衡問題などの非線形問題は、これまでの研究では、有限次元でかつ個別に行われてきており、関数解析学を基礎として捉え、不動点理論や凸解析学を介して、統一にかつヒルベルト空間やバナッハ空間などの無限次元で研究されているものが少なかった。

(2) 微分方程式などで重要な非線形発展方程式問題や、その応用としての最適化理論等の研究では、非拡大写像を仮定したものが多かった。しかしながら、極大作用素のリゾルベントはヒルベルト空間では非拡大写像になるが、バナッハ空間では非拡大写像にならない。そこで、極大作用素のリゾルベントがもつ非拡大写像ではない非線形写像の研究が必要であった。

(3) 工学、理学、医学、経済学などの多くの分野で、応答や結果などの出力から、原因や入力を推定するような問題のことを逆問題というが、これまでもたくさんの分野で研究されており、最近では制約問題など非線形の問題とかかわりを持つ逆問題の研究にまで発展している。だが、バナッハ空間の逆問題の研究は、いくつかの例は知られているが、バナッハ空間の幾何学と関連した難しい問題があるため、その研究はあまりなかった。

2. 研究の目的

本研究は、これまでの研究でわき起こった新たな非線形問題、特に非線形最適化や均衡問題、非線形を含む逆問題、微分方程式等の分野で発生した重要な非線形問題を、非線形関数解析学を基礎にした非線形問題として捉え、それらの問題を新しい不動点理論と凸解析学を介して研究し、これまでの理論よりも優れた非線形関数解析学の理論を構築するとともに、非線形最適化や均衡問題、非線形を含む逆問題、微分方程式等の非線形問題の解明にあたることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 平成 23 年度から 26 年度にかけて行われた『不動点理論と凸解析学を介した非線形関数解析学と非線形問題の究明』(基盤研究(C), #23540188)で、新たに問題になり、かつ重要と思われる非線形最適化や均衡問題、逆問題、微分方程式等の非線形問題、及び現在でも種々の分野で重要な非線形問題を的確に把握し、非線形関数解析学的に再構成してみるとともに、問題点を洗い出す。また、非線形問題に関する参考文献等も参考にし、現状と問題点を明確にする。

(2) 非線形最適化や均衡問題、逆問題を非線形関数解析学的に定式化してみると、研究すべき非線形作用素は、極大単調作用素であることがわかる。バナッハ空間では、その極大単調作用素が m -増大作用素と極大単調作用素に別れる。 m -増大作用素からは増大リゾルベントがつくられ、極大単調作用素からは、古くから知られているリゾルベント(距離リゾルベント)と、最近研究代表者の研究によって発見された相対リゾルベント、擬非拡大リゾルベントがつくられる。4つリゾルベントは特別な場合として、4つの非線形射影がある。増大リゾルベントとその特別な場合の射影以外は、非拡大にならないことがわかっている。増大リゾルベント以外のリゾルベントの性質がこれらの非線形問題を解くのに重要であるので、これまでの結果を整理するとともに、新しい性質をも研究してみる。

(3) バナッハ空間での逆問題を、 m -増大作用素と極大単調作用素から導入される4つの非線形射影、4つのリゾルベント、ならびにバナッハ空間の2つの双対写像を使って定式化して、その証明を試みる。

(4) (3)で工夫された証明の手法は、これまでのヒルベルト空間の逆問題の研究でも新しいものになっているはずである。(3)の証明の手法を使って、ヒルベルト空間の逆問題に対する新しい結果を得たい。これらの結果を使って像再生の問題や制約問題などへの応用を試みたい。

(5) 凸関数の最小化問題は T. Rockafellar の定理を用いると極大単調作用素の零点問題と同値になり、二変数の均衡問題は、やはり極大単調作用素の零点問題となる。これらの零点は、極大単調作用素のリゾルベントの不動点と同値である。非線形最適化や均衡問題の解の一意性問題を、非線形関数解析学的に定式化し、極大単調作用素のリゾルベントを特殊化した写像の一意の不動点定理を用いてその解決にあたる。

(6) 連続でない写像の非線形半群の生成のあと、その共通不動点定理や平均収束定理などの非線形関数解析学を構築するとともに、極大単調作用素の零点問題を解く。さらには微分方程式等の非線形問題の解明にあたる。

4. 研究成果

- (1) 不動点にかわるアトラクティブの概念をヒルベルト空間で導入し、凸性を仮定しないで、平均収束定理を証明することに成功した。また、閉性を仮定しないで、Mann 型の弱収束定理を証明することに成功し、さらには Halpern 型の強収束定理を証明することにも成功した。これらは、よく知られていた Baillon のエルゴード定理、Reich の弱収束定理、Wittmann の強収束定理を大幅に拡張するものである。
- (2) (1)でのアトラクティブポイントをバナッハ空間でも導入し、凸性を仮定しないで Baillon 型の平均収束定理を証明することに成功した。さらに、閉性を仮定しないで Mann 型の弱収束定理は証明したが、Halpern 型の強収束定理は証明することが出来ず、未解決問題として公開した。
- (3) バナッハ空間での逆問題を、 m -増大作用素と極大単調作用素から導入される 4 つの非線形射影、4 つのリゾルベント、ならびにバナッハ空間の 2 つの双対写像を使ってハイブリッド法、特にシュリンキング射影法といわれるハイブリッド法によって定式化し、その強収束定理を得た。
- (4) 像再生や実行可能性問題に関する近似法の研究では、共通不動点を求める近似法を研究し、新しいハイブリッド法による強収束定理を得た。さらに、ここで得られた実行可能性問題の解決法を使って、擬非拡大作用素に関する弱収束定理をも得た。またこれらを非線形最適化問題に応用し、近接点法に関する新しい結果を得た。
- (5) 連続性を仮定しない写像の半群を定義し、その半群に対する不動点定理や平均収束定理を証明することに成功した。このことによって、微分方程式における非線形発展方程式の問題は、半群に非拡大写像を仮定しないで研究できるようになった。
- (6) 必ずしも線形を仮定しない半線形半群のエルゴード定理を証明することに成功した。また、その極限は、4 つの非線形射影の一つを使って特徴化できるという結果も得た。
- (7) (3)で工夫された証明の手法は、これまでのヒルベルト空間の逆問題の研究でも新しいものになっていたのだから、それを使ってヒルベルト空間での逆問題を解くためのいくつかの弱収束、強収束定理を得た。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 16 件)

W. Takahashi, C.-F. Wen, J.-C. Yao, The shrinking projection method for a finite family of demimetric mappings with variational inequality problems in a Hilbert space, Fixed Point Theory, 査読有, 19, 2018, 407-419.

W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for noncommutative two generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 19, 2018, 867-880.

W. Takahashi, A general iterative method for split common fixed point problems in Hilbert spaces and applications, Pure Appl. Funct. Anal., 査読有, 3, 2018, 349-369.

W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for new demimetric mappings and the split common fixed point problem in Banach spaces, Numer. Funct. Anal. Opti., 査読有, 39, 2018, 1011-1033.

W. Takahashi, The split common fixed point problem and the shrinking projection method for new nonlinear mappings in two Banach spaces, Pure Appl. Funct. Anal. 査読有, 2, 2017, 685-699.

W. Takahashi, The split common fixed point problem and the shrinking projection method in Banach spaces, J. Convex Anal., 査読有, 24, 2017, 1017-1028.

W. Takahashi, C.-F. Wen, J.-C. Yao, The split common fixed point problem for families of new nonlinear mappings and hybrid methods in two Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 18, 2017, 1901-1921.

W. Takahashi, Strong convergence theorems by hybrid methods for families of demimetric mappings in Banach spaces and applications, Linear Nonlinear Anal., 査読有, 3, 2017, 321-336.

S. Takahashi, W. Takahashi, Split common null point problem and shrinking projection method for generalized resolvents in two Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 17, 2016, 2171-2182.

M. Hojo, W. Takahashi, A strong convergence theorem by shrinking projection method for the split common null point problem in Banach spaces, Numer. Funct. Anal. Optim., 査読有, 37, 2016, 541-553.

W. Takahashi, The split common fixed point problem and strong convergence theorems

by hybrid methods in two Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 17, 2016, 1051-1067.

W. Takahashi, M. Tsukada, Strong convergence theorems by hybrid methods for semigroups of not necessarily continuous mappings in Hilbert spaces, Annals Funct. Anal., 査読有, 7, 2016, 61-75.

W. Takahashi, The split common null point problem in two Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 16, 2015, 2343-2350.

M. Hojo, W. Takahashi, The split common fixed point problem and the hybrid method in Banach spaces, Linear Nonlinear Anal., 査読有, 1, 2015, 305-315.

S. Akashi, Y. Kimura, W. Takahashi, Strongly convergent iterative methods for generalized split feasibility problems in Hilbert spaces, J. Convex Anal., 査読有, 22, 2015, 917-938.

W. Takahashi, N.-C. Wong, J.-C. Yao, Attractive points and Halpern-type strong convergence theorems in Hilbert spaces, J. Fixed Point Theory Appl., 査読有, 17, 2015, 301-311.

[学会発表](計 8件)

W. Takahashi, New Classes of Nonlinear Operators and Weak and Strong Convergence Theorems in Hilbert Spaces and Banach Spaces, The Sixth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, OIST, Okinawa, Japan, from November 5 to 9, 2018, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Attractive Point and Mean Convergence Theorems for Commutative Nonlinear Mappings in Hilbert Spaces and Banach Spaces, Abstract Harmonic Analysis, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, from June 25 to 29, 2018, Plenary Speaker.

W. Takahashi, General Iterative Method for Split Common Fixed Point Problems and Hierarchical Variational Inequality Problems, International Workshop on Nonlinear and Variational Analysis, Research Center for Nonlinear Analysis and Optimization, Kaohsiung Medical University, Kaohsiung, Taiwan, from July 21 to 22, 2017, Keynote Speaker.

W. Takahashi, Strong Convergence Theorems for New Classes of Nonlinear Operators in Banach Spaces and Open Problems, The 10th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Chitose City Cultural Center, Chitose, Hokkaido, Japan, from July 2 to 9, 2017, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Fixed Points of New Nonlinear Mappings and Solutions of Variational Inequality Problems in Hilbert Spaces or Banach Spaces, International Workshop on Applied Analysis and Optimization, Research Center for Interneural Computing, China Medical University, Taiwan, from May 27 to 30, 2016, Keynote Speaker.

W. Takahashi, Split Common Null Point Problems and Split Common Fixed Point Problems in Two Banach Spaces, The 9th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimization 2016 (ACFPTO2016), King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand, from May 18 to 20, 2016, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Weak and Strong Convergence Theorems for Split Common Null Point Problems in Banach Spaces and Applications, The 6th International Symposium on Banach and Function Spaces, Kitakyusyu, Japan, from September 1 to 6, 2015, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Iterative Methods for Split Common Fixed Point Problems in Banach Spaces, The 11th International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Galatasaray University, Istanbul, Turkey, from July 20 to 24, 2015, Plenary Speaker.

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：小宮 英敏

ローマ字氏名：(KOMIYA, Hidetoshi)

所属研究機関名：慶應義塾大学

部局名：商学部

職名：教授

研究者番号(8桁)：90153676

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。