

令和元年6月25日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04914

研究課題名（和文）リーマン面のモジュールと再生核の複素多変数的変動についての研究

研究課題名（英文）Research on variations of invariants and reproducing kernels on Riemann surfaces under pseudoconvexity

研究代表者

濱野 佐知子 (Hamano, Sachiko)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：10469588

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,700,000円

研究成果の概要（和文）：Schifferスパンおよび調和スパンが誘導する2つの計量について考察し、単葉型リーマン面ではこれらの計量は一致すること、曲率が負で完備な計量であることを証明した。また、単葉型リーマン面の変動が擬凸の場合はこれらの計量が対数的多重劣調和性を示すことに成功した。更に、種数1の開リーマン面が誘導する双曲的スパンの変動について考察し、開リーマン面の変形族が擬凸の場合における双曲スパンの劣調和性を証明した。特に、双曲スパンが調和であることは、変形族が自明であるための必要十分条件であることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の目的は、2次元擬凸領域をそこで定義された正則関数の定数面/ファイバーの族として捉えたとき、ファイバー上に全空間の擬凸性を反映する良いモジュライを新たに構成することで、2次元擬凸領域のモジュライ理論を展開することである。特に、一変数関数論における多重連結領域の等角写像およびポテンシャル論における各主関数のディリクレ問題・ノイマン問題、2乗可積分な半完全正則微分のなす空間の再生核、および多変数関数論的変動である擬凸性との関係を明らかにすることで、全空間の擬凸性を反映する種々の等角不変量の変動の解析へと進化させた。

研究成果の概要（英文）：We showed log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans if the total space is a two-dimensional Stein manifold such that each fiber is a planar open Riemann surface. As an application, we proved that both metrics in fact coincide on planar open Riemann surfaces, have negative curvature everywhere, and are complete. Moreover, in the case of genus one, we studied the variation of hyperbolic spans of open Riemann surfaces. We proved that the hyperbolic span is subharmonic if the total space is a two-dimensional Stein manifold such that each fiber is an open Riemann surface of genus one. In particular, the hyperbolic span is harmonic if and only if the total space is a trivial holomorphic family.

研究分野：数学・基礎解析学

キーワード：解析学 複素解析 多変数関数論 擬凸領域 多重劣調和関数 スタイン多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

平面領域の核関数、調和関数、および等角写像の間には密接な関係があり、開リーマン面上のベルグマン核と対数容量の大小関係についての吹田予想(1972)は、Z.Blocki氏(2013)により部分的に、Q.Guan-X.Zhou氏(2015)により完全に解決された。両者は L^2 正則関数の拡張定理「大沢-竹腰の定理(1987)」を最良評価付きで確立し、この解決に端を発した L^2 拡張理論の進展が近年著しい。

また、山口博史氏(1976)は開リーマン面の変形族に対する対数容量の変動の解析、すなわちグリーン関数のロバン定数が擬凸変動で優調和性を示すことを発見し、西野利雄氏の剛性定理(1969)をファイバーが族 O_G (グリーン関数が存在しないリーマン面全体のなす族)に属する開リーマン面の変形族に拡張することに成功した。その後、米谷文男-山口博史氏(2004)は開リーマン面の変形族におけるファイバー上のベルグマン計量の動きを複素助変数の2階変分で明記し、この変分公式からリーマン面の変動が擬凸ならばベルグマン計量は対数的多重劣調和であることを示した。B.Berndtsson氏(2006, 2009)はこれを高次元に拡張し、その結果を用いた辻元氏や高山茂晴氏による代数幾何への応用がある。領域変分理論は正則葉層理論の観点からも注目されている。

研究代表者はグリーン関数の代わりに、等角写像と密接な関係にありリーマン面上に与えられた特異点・特徴的な境界挙動を持つ調和関数(L.Sarioの主関数)を考察することで、他の等角不変量に対する新たな変分公式を確立した(2014)。そこで、この変分公式を手がかりに、全空間の擬凸性を反映する等角不変量の変動理論の定式化が可能ではないかという着想に至った。

2. 研究の目的

多変数複素正則関数が定義される領域は複素 n 次元空間上で擬凸であることが知られている。1変数複素関数では表出しない擬凸領域、そしてその一般化であるスタイン多様体の形状を多角的(複素解析的、微分幾何学的、代数幾何学的)な観点から理解することは、この100年に渡って多変数関数論の指導原理となってきた。本研究の目的は、2次元擬凸領域をそこで定義された正則関数の定数面/ファイバーの族として捉えたとき、ファイバー上に全空間の擬凸性を反映する良いモジュライを新たに構成することで、2次元擬凸領域のモジュライ理論を展開することである。特に、一変数関数論における多重連結領域の等角写像およびポテンシャル論における各主関数のディリクレ問題・ノイマン問題、2乗可積分な半完全正則微分のなす空間の再生核、および多変数関数論的変動である擬凸性との関係を明らかにすることである。

3. 研究の方法

本研究の問題提起は開リーマン面の変形族に関するものであり、一般には、複素2次元多様体から複素1次元円板への全射正則写像で臨界点を持たず、かつ、ファイバーが与えられた多様体になっているもの(解析族)を考える。特に、全空間が擬凸(あるいはスタイン多様体)である場合が重要である。複素助変数と共にリーマン面が関数論的に動いたときに、各リーマン面の等角写像に関連したモジュールが複素多変数的に変動するようなもの(例えばリーマン面のスパン)を見つけ、一変数的量変動と多変数関数論、特に擬凸領域との関連を引き起こす原理を追求する。研究課題を次のように分類して研究を遂行した。

- (1) 半完全正則微分のなす空間の再生核の多変数的変動についての研究。
- (2) 単葉型リーマン面上のSchifferスパンと調和スパンが導く計量の考察。
- (3) 種数1開リーマン面からなる解析族における双曲的スパンの研究。
- (4) 種数2以上の有限種数開リーマン面上の流体力学的微分の考察。

4. 研究成果

ベルグマン核以外の等角不変量に対する類似の変分公式を確立し、全空間の擬凸性を反映する種々の等角不変量の変動の解析へと進化させた。

(1) L^2 正則微分のなすヒルベルト空間 $A(R)$ の再生核関数と再生核 K (ベルグマン核)は、同じ1つの関数(グリーン関数)とその定数項(ロバン定数)で具体的に明示され(Schiffer '46, Suita '72)、その表示を手がかりに、ベルグマン核の解析は1変数及び多変数的に進展している。本研究では、半完全(任意の分割輪体に沿う周期が0)な正則微分のなす空間 $S(R)$ の再生核関数と再生核に着目した。 $A(R)$ の再生核 K を $S(R)$ へ直交射影して得られる再生核が、対数極を2つもつ主関数とその定数項による具体的表現をもつことを発見し、変動が滑らかな擬凸の場合にベルグマン核と同様の性質を示すことに成功した。主関数は等角写像に関連しているというグリーン関数にはない特色がある。

(2) 研究課題(1)で得られた結果の応用として、Schifferスパンおよび調和スパンが誘導する2つの計量について考察した。単葉型リーマン面ではそれらの計量は一致すること、曲率が負で完備な計量であることを証明した。また、単葉型リーマン面の変動が擬凸の場合は計量に対数的多重劣調和性を示すことに成功した。その詳細はMath. Z.に単著論文として出版された。

(3) 有限種数 g の開リーマン面 R を1つ固定し、 R から同じ種数の閉リーマン面 S への等角埋め込みの自然な同値関係のもとでの同値類の全体を考えると、 S の周期行列を元とする g 次

ジーゲル上半空間の部分集合 $M(R)$ が定まる。特に、柴雅和氏(1987)は、種数 1 の場合、 $M(R)$ は上半平面内の閉円板であることを示した。本研究では、種数 1 開リーマン面 $R(t)$ の変形族を考察し、各開トーラスのコンパクト化で得られる閉トーラスが誘導するモジュライの全体、すなわちモジュライ集合の変動について考察した。種数 1 の開リーマン面族における流体力学的微分の変動を 2 階変分で明記することにより、開リーマン面の変動が擬凸ならば、モジュライ円板 $M(R(t))$ の双曲的スパンは劣調和であることを示した。また、擬凸変動が直積領域と双正則同値であるための必要十分条件は双曲的スパンが調和であることを証明した。その詳細は Kyoto J.M. に濱野-柴-山口氏との共著論文として出版された。

(4) 種数 2 以上の有限種数開リーマン面が滑らかに変動する場合について、ある流体力学的微分が誘導するモジュラスの動きを 2 階変分で明記することに成功した。その詳細は Oberwolfach Report に濱野-山口の共同研究結果として報告した。

(5) 開リーマン面の Schiffer スパン(種数 0) およびその拡張である双曲的スパン(種数 1) の擬凸変動における複素多変数的性質と 2 つのスパンの関係を明らかにした。その詳細は Springer Proc. Math. Stat. に単著論文として出版された。

(6) 得られた研究成果は国内外のシンポジウムおよび学会発表等にて口頭発表を行い、関連する国際雑誌において査読付き論文として発表した。また、ウェブ上にて研究成果の積極的な公開を行っている。特に、補助事業の最終年度はこれまで得られた研究成果の集大成として、積極的に海外へ発信した。さらに、函数論およびその関連分野の大学院生・若手研究者に発表の場を提供し、積極的に研究活動を行うことを目的とする研究集会を企画し、世話人として活動を支援した：2018 年度多変数関数論冬セミナー(大阪市立大学, 2018 年 12 月 21 日~12 月 23 日), 2015 年度第 50 回函数論サマーセミナー(福島県二本松市, 2015 年 9 月 4 日~9 月 6 日)。これは将来につながる研究の芽を育てる重要な活動であった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

Sachiko Hamano, Variational formulas for principal functions and applications, Proc. of Conference on Teichmüller and Grothendieck-Teichmüller theories, Chern Institute, Nankai, July 24-30, 2016 (ed. L.Ji, A.Papadopoulos and W.Su), Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics, World Scientific (to appear in 2019). [査読有り]

Sachiko Hamano, Pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces of the same topological type, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report No. 40/2018, New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups, Organised by Ken'ichi Ohshika, Osaka. Athanase Papadopoulos, Strasbourg. [査読なし]
DOI: 10.4171/OWR/2018/40

Sachiko Hamano, Variation of Schiffer and hyperbolic spans under pseudoconvexity. Geometric complex analysis, 171-178, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 246, Springer, Singapore, 2018. [査読有り]
DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-1672-2_12

Sachiko Hamano, Masakazu Shiba, and Hiroshi Yamaguchi, Hyperbolic span and pseudoconvexity. Kyoto Journal of Mathematics 57 (2017), no. 1, 165--183. [査読有り]
DOI: 10.1215/21562261-3759558

Sachiko Hamano, Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans. Mathematische Zeitschrift 284 (2016), no. 1-2, 491--505. [査読有り]
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00209-016-1663-4>

[学会発表](計 28 件)

Sachiko Hamano, Variation of the a -span of an open Riemann surface and pseudoconvexity, Complex Analytic Geometry Seminar (Pohang University of Science and Technology, 韓国) 2019 年 3 月。

濱野佐知子, 種数 1 のある開リーマン面の擬凸変動に対する同時一意化について, 第 51 回東北複素解析セミナー(東北大学) 2019 年 2 月。

濱野佐知子, 流体力学的微分の変分公式とその応用について, 等角写像論・値分布論合同研究集会(大阪府立大学) 2018 年 12 月。

濱野佐知子, 流体力学的微分の変分公式とその応用について, Geometry of Riemann surfaces and related topics(金沢大学サテライト・プラザ) 2018 年 10 月。

Sachiko Hamano, Variational formulas for hydrodynamic differentials and its application, 102e rencontre entre mathématiciens et physiciens théoriciens (Institut de Recherche Mathématique Avancée (University of Strasbourg and CNRS), フランス) 2018年9月.

Sachiko Hamano, Pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces of the same topological type, New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups, Meetings at Oberwolfach in 2018; Workshop ID: 1836 (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, ドイツ) 2018年9月.

濱野佐知子, Pseudoconvex domains fibered by open Riemann surfaces of the same topological type, リーマン面に関連する位相幾何学 (東京大学) 2018年8月.

Sachiko Hamano, Variational formulas for hydrodynamic differentials and its application, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 97: Analysis and Dynamics on Boundaries of Manifolds and Related Topics (National Taiwan University, 台湾) 2018年7月.

濱野佐知子, 有限種数開リーマン面の a -スパンと擬凸領域, 名城大学・ポテンシャル論セミナー (名城大学) 2018年6月.

Sachiko Hamano, Variation of the a -span of an open Riemann surface and pseudoconvexity, Hong Kong Geometry Colloquium (The University of Hong Kong, 香港) 2018年5月.

濱野佐知子, 有限種数開リーマン面の a -スパンと擬凸領域, 日本数学会 2018年度年会 函数論分科会 (東京大学) 2018年3月.

濱野佐知子, Variation of the a -span of an open Riemann surface and pseudoconvexity, 2017年度リーマン面・不連続群論 (名古屋大学) 2018年2月.

Sachiko Hamano, Variational formulas for hydrodynamic differentials and pseudoconvexity, Several Complex Variables; International Scientific Conference dedicated to the centennial of B.V. Shabat (Siberian Federal University, ロシア) 2017年9月.

Sachiko Hamano, Variation of the moduli disk for closings of an open torus under pseudoconvexity, Seminar at Institute for Advanced Mathematical Research (University of Strasbourg, フランス) 2017年9月.

Sachiko Hamano, Variation of the moduli disk for an open Riemann surface of finite genus, Geometry And Its Applications Seminar on Complex Analytic Geometry (Pohang University of Science and Technology, 韓国) 2017年6月.

濱野佐知子, 流体力学的微分の2階変分公式とその応用について, 名城大学・ポテンシャル論セミナー (名城大学) 2017年6月.

濱野佐知子, The moduli set of closings of an open Riemann surface and pseudoconvexity, Prospects of Theory of Riemann surfaces (山口大学) 2016年12月.

濱野佐知子, 種数有限の開リーマン面が誘導するユークリッドスパンと擬凸領域, 東大数理・複素解析幾何セミナー (東京大学) 2016年11月.

濱野佐知子, 流体力学的微分の変分公式とその応用について, 第59回函数論シンポジウム (静岡) 2016年10月.

濱野佐知子, 有限種数の開リーマン面が誘導するモジュライ円板と擬凸領域, 日本数学会 2016年度秋季総合分科会 函数論分科会 (関西大学) 2016年9月.

②1 Sachiko Hamano, Variational formulas for hydrodynamic differentials and applications, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories (Chern Institute of Mathematics, Nankai University, 中国) 2016年7月.

- ⑳ Sachiko Hamano, The moduli disk and pseudoconvexity, The 11th Korean Conference in Several Complex Variables (The Kolon Hotel in Gyeong-Ju, 韓国) 2016年7月.
- ㉑ Sachiko Hamano, Variational formulas for hydrodynamic differentials and applications, Geometry And Its Applications Seminar on Complex Analytic Geometry (Pohang University of Science and Technology, 韓国) 2016年7月.
- ㉒ 濱野佐知子, Variational formulas for hydrodynamic differentials and the application, 大阪市立大学数学研究所談話会(大阪市立大学) 2016年4月.
- ㉓ 濱野佐知子, 流体力学的微分の変分公式とその応用について, 2015年度多変数関数論冬セミナー(京都大学) 2015年12月.
- ㉔ 濱野佐知子, Variational formula for Ls-canonical semi-exact differential and application, 日本数学会2015年度秋季総合分科会 函数論分科会(京都産業大学)2015年9月.
- ㉕ 濱野佐知子, Variational formulas for canonical differentials and application, The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (Kyushu Sangyo University) 2015年8月.
- ㉖ 濱野佐知子, Variational formulas for canonical differentials and application, 東大数理・複素解析幾何セミナー(東京大学)2015年4月.

〔図書〕(計2件)

濱野佐知子, 吉永正彦, 洪川元樹, 依岡輝幸, 山田澄生, 尾高悠志, 他, 日本評論社・数学セミナー2016年9月号(通巻659号) 特集「私の選ぶとおきの数式」102ページ, 『岡の上空移行の原理』pp.30--31 執筆担当.

<https://www.nippyo.co.jp/shop/magazine/6679.html>

濱野佐知子, 砂田利一, 斎藤毅, 平松豊一, 金子昌信, 洪川元樹, 他, 日本評論社・数学セミナー2014年12月号(通巻638号) 特集「三角函数」96ページ, 『複素の世界での三角関数』pp.18--22 執筆担当.

<https://www.nippyo.co.jp/shop/magazine/6679.html>

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

https://research-soran17.osaka-cu.ac.jp/html/100000808_ja.html

2018年度 多変数関数論冬セミナー

<https://sites.google.com/site/scvwintersemi2018/home>

第13回女子中高生のための関西科学塾C日程

<https://www.osaka-cu.ac.jp/ja/event/2018/181014>

三重県立松阪高等学校スーパーサイエンスハイスクール研究開発に係る運営指導委員会委員

<http://www.mie-c.ed.jp/hmatus/>

2015年度 第50回函数論サマーセミナー

<https://sites.google.com/site/summerseminar2015/>

6. 研究組織

(1)研究分担者 (2016年度-2018年度)

研究分担者氏名: 柴 雅和

ローマ字氏名: (SHIBA, masakazu)

所属研究機関名: 広島大学

部局名: 工学研究科

職名: 名誉教授

研究者番号(8桁): 70025469

(2)研究協力者

研究協力者氏名：山口 博史

ローマ字氏名：(YAMAGUCHI, hiroshi)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。