

平成 30 年 5 月 7 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04929

研究課題名(和文)楕円型偏微分方程式に対するポテンシャル論的研究

研究課題名(英文)Potential theoretic study for elliptic partial differential equations

研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA, TETSU)

広島大学・教育学研究科・教授

研究者番号：50294476

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：変動指数をもつルベグ空間やソボレフ空間は非線形偏微分方程式を考察するのに有用な関数空間である。これらの関数空間は、弾性学や電気流動学の研究に関連して重要であることがわかってきた。本研究では、Musielak-Orlicz-Morrey 空間やgrand Musielak-Orlicz-Morrey 空間における極大作用素の有界性を導き、その応用として、Musielak-Orlicz-Morrey 空間やgrand Musielak-Orlicz-Morrey 空間に属する関数のリースポテンシャルのソボレフの不等式、Trudinger指数積分不等式、連続性について新しい知見を得た。

研究成果の概要(英文)：Variable exponent Lebesgue spaces and Sobolev spaces were introduced to discuss nonlinear partial differential equations with non-standard growth condition. These spaces have attracted more and more attention in connection with the study of elasticity and electrorheological fluids. In this research, we studied the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on Musielak-Orlicz-Morrey spaces and grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces. As an application of the boundedness of the maximal operator, we establish a generalization of Sobolev's inequality, Trudinger's exponential inequality and continuity for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz-Morrey spaces and grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces.

研究分野：実解析

キーワード：ソボレフ関数 楕円型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

一般の距離空間上でのソボレフ関数の研究が、微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用を念頭に、Martio, Koskela, Heinonen, Kilpeläinen らフィンランド学派を中心に、学際的かつ国際的にも大きな進歩をしつつある。

また、21世紀に入って、電気流動学や弾性学などへの応用を念頭において、変動指数をもつ偏微分方程式の考察とそのための関数空間の理論が重要であることがわかってきた。変動指数をもつ Orlicz 空間や変動指数をもつ Morrey 空間を一般化した Musielak-Orlicz-Morrey 空間の研究は世界的にみてもほとんどされておらず、今後の進展が期待されている。

2. 研究の目的

(1) 電気流動学や弾性学などへの応用のために、ソボレフ空間だけでなく、変動指数をもつ Musielak-Orlicz 空間、Musiela-Orlicz-Morrey 空間、Campanato 空間などの関数空間においてソボレフ型定理を進展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。

(2) 偏微分方程式論、多様体上の微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用のために、距離空間上においてソボレフ型定理を進展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。

(3) 自己相似集合に代表されるフラクタルを境界にもつ領域におけるソボレフ関数の境界挙動を調べる。

(4) 非線形楕円型偏微分方程式の解の性質、ペロン法による非線形ディリクレ問題を調べる。

3. 研究の方法

平成27年度は、主として、変動指数をもつ Musielak-Orlicz 空間や変動指数をもつ grand Musielak-Orlicz-Morrey 空間に関するソボレフ型定理に関する研究などを行った。距離空間上の変動指数をもつ関数空間に関する研究も行った。

平成28年度以降は、主として、距離空間上の変動指数をもつ Musielak-Orlicz 空間や変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間におけるソボレフ型定理に関する研究などを行った。

4. 研究成果

(1) 変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間において、極大作用素の有界性に関する結果を得た。Hedberg の方法を用いることにより、変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間に属する関数のリースポテンシャルに対するソボレフの不等式を得た。これらの研究から、ソボレフ空間だけでなく、Musiela-Orlicz-Morrey 空間の解析の重要性を再認識できた。

(2) 変動指数をもつ Musielak-Orlicz 空間におけるノルム不等式について成果を得た。距離空間上の Musielak-Orlicz-Sobolev 空間の諸性質、境界値零をもつ Musielak-Orlicz-Sobolev 空間の諸性質を調べた。これらの研究から、Musiela-Orlicz 空間の解析の重要性を再認識できた。

(3) 変動指数をもつ grand Musielak-Orlicz-Morrey 空間において、一般化されたリースポテンシャルに対するソボレフの不等式、Trudinger の指数積分不等式、連続性に関する成果を得た。これらの研究から、grand Musielak-Orlicz-Morrey 空間の解析の重要性を認識できた。

(4) 変動指数をもつ重み付き Morrey 空間において、リースポテンシャルに対するソボレフの不等式や Trudinger の指数積分不等式について成果を得た。変動指数をもつ central Morrey 空間におけるソボレフの定理に関する成果も得た。

(5) 2倍条件を仮定しない non-doubling 測度空間上におけるソボレフ型定理の発展を目指し、Morrey 空間から Campanato 空間への一般化されたリースポテンシャルに対する有界性や変動指数をもつルベグ空間に属

する関数のリースポテンシャルに対するソボレフの不等式に関する成果を得た。2つの変動指数をもつ Orlicz 空間に属する関数のリースポテンシャルに対する Trudinger の指数積分不等式や連続性についても成果を得た。これらの研究から、距離空間上での Musielak-Orlicz-Morrey 空間の解析の重要性を認識できた。

(6) 距離空間の一般化された Morrey 空間や non-doubling 測度空間の Orlicz-Morrey 空間に属する関数の一般化された分数冪積分作用素の有界性に関する成果を得た。

(7) 一般化されたバナッハ空間上での分数冪 Hardy 作用素に関する結果を得た。双対性に関する成果を得た。

(8) non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz 空間の双対性に関する成果を得た。

(9) 変動指数をもつ Morrey 空間に属する関数の一般化されたリースポテンシャルの原点の近くでの球面平均の極限值、重み付きの変動指数をもつルベグ空間に属する関数のリースポテンシャルの球面の近くでの球面平均の極限值に関する成果を得た。リースポテンシャルに対する Musielak-Orlicz 積分平均に関する成果も得た。

(10) non-doubling 測度空間上の $L(\log L)^{q(\cdot)}$ に属する関数の対数ポテンシャルに対する指数積分不等式を示したりした。

(11) 距離空間における一様領域上、変動指数をもつ単調関数の境界極限值に関する成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計22件)

1. S. Kanemori, T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity for Riesz potential of functions in Orlicz spaces of two variable exponents over non-doubling measure spaces, *Kyoto J. Math.* 57 (2017), 79-96. 査読有
DOI 10.1215/21562261-3759522
2. T. Ohno and T. Shimomura, Boundary limits of monotone Sobolev functions in Musielak-Orlicz spaces on uniform domains in a metric space, *Kyoto J. Math.* 57 (2017), 147-164. 査読有
DOI 10.1215/21562261-3759549
3. Y. Sawano and T. Shimomura, Boundedness of the generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces over metric measure spaces, *Zeit. Anal. Anwend.* 36 (2017), 159-190. 査読有
DOI: 10.4171/ZAA/1584
4. Y. Sawano and T. Shimomura, Generalized fractional integral operators over non-doubling metric measure spaces, *Integral Transforms and Special Functions*, 28 (2017), 534-546. 査読有
<https://doi.org/10.1080/10652469.2017.1318281>
5. Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura and Y. Yamauchi, Growth properties near the origin for generalized Riesz potentials, *J. Math. Anal. Appl.* 454 (2017), 285-302. 査読有
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.04.068>
6. Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Growth properties for Riesz potentials of functions in weighted variable $L^{p(\cdot)}$ spaces, *Nonlinear Analysis*. 162 (2017), 49-75. 査読有
<https://doi.org/10.1016/j.na.2017.06.010>
7. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Duality of non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces, *Potential Anal.* 47 (2017), 447-460. 査読有
DOI 10.1007/s11118-017-9621-2
8. F. - Y. Maeda, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of the maximal operator on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, *Tohoku Math. J.* 69 (2017), 483-495. 査読有
doi:10.2748/tmj/1512183626
9. T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev inequalities for Riesz potentials of functions in $L^{p(\cdot)}$ over non-doubling measure spaces, *Bull. Aust. Math. Soc.* 93 (2016), 128-136. 査読有
DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S00049727>

15001331

10. T. Ohno and T. Shimomura, Musielak-Orlicz-Sobolev spaces with zero boundary values on metric measure spaces, Czechoslovak Math. J. 66 (141) (2016), 371-394. 査読有

DOI: 10.1007/s10587-016-0262-1

11. Denny Ivanal Hakim, Y. Sawano and T. Shimomura, Boundedness of generalized fractional integral operators from the Morrey space $L_{1, \lambda}(X; \mu)$ to the Campanato space $L_{1, \lambda}(X; \mu)$ over non-doubling measure spaces, Azerbaijan J. Math. 6 (2016), 117-127. 査読有

12. F. - Y. Maeda, Y. Sawano and T. Shimomura, Some norm inequalities in Musielak-Orlicz spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 41 (2016), 721-744. 査読有
doi:10.5186/aasfm.2016.4148

13. T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity for Riesz potentials of functions in grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces over non-doubling metric measure spaces, Kyoto J. Math. 56 (2016), 633-653. 査読有

DOI 10.1215/21562261-3600211

14. T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on non-homogeneous central Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Mediterr. J. Math. 13 (2016), 3341-3357. 査読有

DOI 10.1007/s0009-016-0689-5

15. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta and T. Shimomura, Growth properties of Musielak-Orlicz integral means for Riesz potentials, Nonlinear Anal. 112 (2015), 69-83. 査読有

doi:10.1016/j.na.2014.09.012

16. T. Futamura, T. Ohno and T. Shimomura, Boundary limits of monotone Sobolev functions with variable exponent on uniform domains in a metric space, Rev. Mat. Complut. 28 (2015), 31-48. 査読有

doi:10.1007/s13163-014-0154-6

17. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev type and Trudinger type inequality on grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40 (2015), 403-426. 査読有

doi:10.5186/aasfm.2015.4027

18. Y. Mizuta and T. Shimomura, Weighted Morrey spaces of variable exponent and Riesz potentials, Math. Nachr. 288, No. 8-9, (2015), 984-1002. 査読有

DOI 10.1002/mana.201400032

19. Y. Mizuta, Ales Nekvinda and T. Shimomura, Optimal estimates for the fractional Hardy operator, Studia Math. 227 (2015), 1-19. 査読有

doi:10.4064/sm227-1-1

20. T. Ohno and T. Shimomura, Musielak-Orlicz-Sobolev spaces on metric measure spaces, Czechoslovak Math. J. 65 (140) (2015), 435-474. 査読有

10.1007/s10587-015-0187-0

21. Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's theorem for non-homogeneous central Morrey spaces of variable exponent, Hokkaido Math. J. 44 (2015), 185-201. 査読有

22. S. Kanemori, T. Ohno and T. Shimomura, Exponential integrability for logarithmic potentials of functions in generalized Lebesgue spaces $L(\log L)^{q(\cdot)}$ over non-doubling measure spaces, Taiwanese J. Math. 19, No.6, (2015), 1795-1803. 査読有

DOI: 10.11650/tjm.19.2015.5564

〔学会発表〕(計4件)

1. 下村 哲, Musielak-Orlicz 空間における

Sobolev の不等式について, 実解析学シンポジウム 2017 (名古屋大学 坂田・平田ホール(理学南館)), 2017年11月10日.

2. 下村 哲 (招待講演) Boundary behavior of monotone Sobolev functions on John domains, 第60回関数論シンポジウム(セントコア山口), 2017年10月7日.

3. Tetsu Shimomura, Sobolev inequalities for Musielak-Orlicz spaces, Nonstandard growth phenomena 2017 (University of Turk, Quantum building, main campus), August 31, 2017.

4. 下村 哲, Optimal estimates for the fractional Hardy operator, 日本数学会秋季総合分科会(関西大学), 2016年9月15日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)

広島大学・大学院教育学研究科・教授

研究者番号: 50294476