

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月3日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04934

研究課題名(和文)放物型方程式のポテンシャル論的および関数解析的研究

研究課題名(英文) Potential theory for parabolic equations and the functional analysis

研究代表者

西尾 昌治 (Nishio, Masaharu)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90228156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：当該研究において、熱方程式およびそこから派生し一般化された放物型方程式に対し、ポテンシャル論的および関数解析的手法を用いて解析を行った。関数空間としては、ベルグマン空間、ブロッホ空間、およびハーディ空間を導入し、調和双対について議論するとともに、多重放物型方程式に関連した空間など、より一般の関数空間に対する再生核の決定がなされた。また、不定形量の熱方程式に関連して、対応する等角写像を決定するいわゆるリウヴィル型定理が確立された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般的に言って、関数を解析することを考慮したとき、性質の良い、取り扱いやすい関数について詳細に研究調査を行ったのち、近似の手法を用いたアプローチによって目的の結果を得ようとすることは有効である。そして、本研究の成果はそのような方向に向かって進展しているといえる。すなわち、一般の関数は多重調和関数、あるいは、多重熱方程式の解で近似されることが期待されており、今回、我々の理論が、多重放物型方程式の方向に一般化されてきたことによって、将来、さらなる応用が期待される。

研究成果の概要(英文)：In the present research, we analysed the heat equation and related more general parabolic equations by using potential theory and the functional analysis. We introduced the analogue of Bergman spaces, Bloch spaces and Hardy spaces, to discuss conjugate functions associated with the parabolic operators. Moreover, we obtained some explicit form of the reproducing kernels, the integral operators of which correspond to the orthogonal projection, for more general function spaces associated with the iterated parabolic operators. As for the heat equation for indefinite metrics, we obtained the Liouville type theorem for conformal mappings, which enables us to investigate caloric morphisms.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：ポテンシャル論 熱方程式 分数ベキラプラシアン マルチン境界 ベルグマン空間 ブロッホ空間  
調和双対 再生核

## 1. 研究開始当初の背景

ポテンシャル論は、リーマン面上の解析関数の存在に関して、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解の一意性などの研究から進展してきた。近年では、Markov 過程など確率論との密接な関係からの寄与もあり、複素解析、確率論、Riemann 幾何学、関数解析学などの分野が交錯する研究分野へと発展してきている。放物型方程式も Laplace 方程式などの楕円型方程式と同様にポテンシャル論的考察が極めて有効な研究対象である。これまでの研究において、放物型方程式のポテンシャル論的、関数解析的研究がなされ、Jump 型確率過程に対応した放物型方程式について、放物型ベルグマン空間が提唱され、その研究が最終段階に入ってきた状況であった。

## 2. 研究の目的

上記背景のもと、当該研究の基本的な目的は、放物型方程式について、解空間の構造と底空間の幾何学的状況などとの関係を解の積分表示などポテンシャル論的手法を用いて詳細に解析し、さらに関数解析的考察を加えることである。本研究で、考察の対象となった放物型方程式は、(1). 熱方程式 (不定計量に関連したものも含む)、(2). 多重熱方程式、および、(3). 分数べき Laplacian を含む微積分放物型方程式である。

## 3. 研究の方法

(1) まず、予算の使用方法について大まかに述べる。数学においては、研究を進めるためには他の研究者との研究連絡をこまめにとることが、文献の精査とともに必要不可欠である。したがって、当該研究においては、研究費の大部分を旅費に当てることになった。また、備品予算は主に新規に出版された図書の購入に充てられた。

(2) 次に、研究目的であげた各研究対象に対するアプローチの方法について研究分担者、研究協力者の役割分担とともに述べる。

- ① 熱方程式に対するマルチン境界決定のために研究分担者の下村が担当し、不定形量を視野に入れた熱方程式を解明するために等角写像の研究から始めた。
- ② 多重熱方程式の研究は、研究代表者の西尾と下村の共同研究として進めた。平均値の性質が重要であるが、新しい平均値の性質としての再生公式の確立から研究を進めた。
- ③ 分数べき Laplacian の研究は、研究協力者として、山田雅博、菱川洋介、田中清喜の3名を迎え、関数空間として Bergman 型空間を導入し、研究を進める。また、確率論的な立場からの研究は研究分担者の竹内敦司が担当した。

## 4. 研究成果

本研究では大まかに次の3つの研究テーマに沿って研究が進められた。1つ目は「熱方程式のマルチン境界」2つ目は「多重熱方程式に関する研究」そして3つ目は「放物型ベルグマン空間などの放物型方程式の解のなす関数空間およびその上の作用素に関する研究」である。以下において、各研究テーマごとの研究成果を今後の課題とともに述べる。

- (1) 第1の熱方程式のマルチン境界に関しては、基礎となる熱方程式について、その解を保つ変換に関する研究を分担者の下村勝孝が中心となって等角写像との関連から研究を進めてきた。特に、不定形量がローレンツ不変な時に、Bateman 変換との関連を明らかにし、ポテンシャル論研究集会で発表した。これにより、その場合の Caloric Morphisms の決定問題の完全な解決にあと1歩とせまったが、それは今後の課題として残された。
- (2) 次に第2の多重熱方程式に関する研究では、Laplacian を分数べきにする一般化が成功を収めつつあり、多重調和関数への応用も視野に入ってきている。本年度は前年度に得られた再生核の表示公式を重み付きで一般指数のルベグ空間に対して確立し、その  $L_p$  有界性も示すことができた。これらの成果は、国際研究集会において発表された。
- (3) 最後に第3の放物型方程式の解のなす空間についてであるが、放物型ベルグマン空間の双対空間の研究から現れてきた放物型ブロッホ空間について、新たな調和双対の概念を提唱し、論文にまとめて発表した。今後の課題として、前項との関連から多重放物型方程式の解のなす空間の詳細な研究が重要性を増してきている。特に、ブロッホ空間の構成とその再生公式、およびそれに関する射影作用素の有界性の研究が急がれるところである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 14 件)

1. A. Takeuchi and H. Tsukada, Remark on pathwise uniqueness of stochastic differential equations driven by Levy processes, to appear in Stochastic Analysis and Applications (2019). (Reviewed)

2. A. Takeuchi, Integration by parts formulas for marked Hawkes processes, *Statist. Probab. Lett.* 145 (2019), 229--237. (Reviewed)
3. Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada, A system of conjugate functions on parabolic Bloch spaces, *J. Math. Soc. Japan* 70 (2018), no. 3, 1085--1102. (Reviewed)
4. A. Takeuchi, Remark on convergence rate of generalized extreme value distributions via integration by parts formulas, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report, 402, 112--119 (2018). (Not Reviewed)
5. A. Takeuchi, Integration by parts formulas for conditional intensities of marked Hawkes processes, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report, 385, 41 - 47, (2017). (Not Reviewed)
6. M. Nishio and K. Tanaka, Harmonic Bergman kernels and Toeplitz operators on the ball with radial measures, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 62 (2017), no. 1, 155--169. (Reviewed), [http://imar.ro/journals/Revue\\_Mathematique/home\\_page.html](http://imar.ro/journals/Revue_Mathematique/home_page.html)
7. M. Nishio and K. Shimomura, Reproducing kernels for iterated parabolic operators on the upper half space with application to polyharmonic Bergman spaces, *Complex Anal. Oper. Theory* 11 (2017), no. 8, 1865--1878. (Reviewed)
8. A. Takeuchi, Joint distributions for stochastic functional differential equations. *Stochastics* 88 (2016), no. 5, 711--736. (Reviewed)
9. K. Shimomura, Liouville type theorem on conformal mapping for indefinite metrics associate with ultra-hyperbolic equations, *Math. J. Ibaraki Univ.* 48 (2016), 1--18. (Reviewed), <https://www.jstage.jst.go.jp/browse/mjiu>
10. 西尾昌治, 半空間上の多重調和関数に関する再生核について, 数理解析研究所講究録 1980 (2016), 56--69. (査読なし).
11. Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada, Fractional calculus and  $L(\alpha)$ -conjugates on parabolic Hardy spaces, *Sci. Math. Jpn.* 77 (2015), no. 3, 371--391. (Reviewed), <http://www.jams.or.jp/notice/scmj/smj.html>

〔学会発表〕 (計 41 件)

1. M. Nishio, Bergman type spaces for iterated parabolic operators of fractional order, Potential Analysis and its Related Fields, 2019.
2. A. Takeuchi, Remark on pathwise uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by Levy processes, University of Lille (France), Probability's es et Statistique, 2018.
3. A. Takeuchi, Sensitivity analysis for jump processes, Universitate Hamburg (Germany), Kolloquium über Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse, 2018.
4. M. Nishio, Reproducing kernels with respect to function spaces of polyharmonic and polyparabolic functions, Analysis and Dynamics on Boundaries of Manifolds and Related Topics, AIMS 2018, July 5 -- 9, 2018, National Taiwan University, Taipei, Taiwan.
5. M. Nishio, Hilbert spaces and reproducing kernels for parabolic operators of fractional order, Second Interdisciplinary and Research Alumni Symposium iJaDe2018, 2018.
6. K. Shimomura, Caloric morphisms for rotation invariant metrics on semi-euclidean spaces, American Institution Mathematical Sciences, 2018.
7. A. Takeuchi, Density for the solution to stochastic functional differential equations, Second Interdisciplinary and Research Alumni Symposium iJaDe2018, 2018.
8. A. Takeuchi, Remark on pathwise uniqueness of solutions to SDEs driven by Léve processes, 津田塾大学, The tenth meeting on Probability and PDE, 2018.
9. A. Takeuchi, Convergence rates of extreme value distributions via the Stein equation, 岡山大学, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 2018.
10. 竹内敦司, 身近にある確率モデル ～ランダム現象の考察～, 東京女子大学, 東京女子大学学会主催 数学部会 公開講演会, 2018.
11. M. Nishio, Reproducing property with respect to iterated parabolic operators of fractional order, Potential Theory Seminar at Meijo University, 2018.
12. 西尾昌治, Reproducing property for iterated parabolic operator on the upper half space, ポテンシャル論研究集会, 2018.
13. 西尾昌治, 放物型方程式に対するポテンシャル論と関数空間, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会特別講演, 2017.
14. 下村勝孝, Caloric morphism with Bateman space mapping for radial metrics, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会, 2017.
15. 下村勝孝, 西尾昌治, Weighted polyharmonic and polyparabolic Bergman spaces on the upper half space, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会.
16. A. Takeuchi, Integration by parts formula for marked Hawkes processes, 関西確率論セミナー, 2017.
17. A. Takeuchi, Integration by parts formula for marked Hawkes processes, Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017, 2017.
18. A. Takeuchi, Remark on convergence rate of generalized extreme value distributions via integration

- by parts formulas, 統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」, 2017.
19. A. Takeuchi, Malliavin calculus for marked Hawkes processes, 日本数学会 2017 年度年会, 2017.
  20. 竹内敦司, Hawkes process と Malliavin 解析, 岡山-広島 解析・確率論セミナー2017, 2017.
  21. A. Takeuchi, Joint distributions for stochastic functional differential equations, Osaka-UCL Workshop on Stochastics, Numerics and Risk, 2017.
  22. M. Nishio and K. Shimomura, Reproducing kernels for polyharmonic functions on half spaces, International Conference on Complex Analysis and Related Topics, The 14th Romanian-Finnish Seminar, 2016.
  23. A. Takeuchi, Malliavin calculus for conditional intensities of Hawkes processes, 研究集会「確率解析とその周辺」, 2016.
  24. A. Takeuchi, Integration by parts formula for conditional intensities of marked Hawkes processes, 統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」, 2016.
  25. 西尾昌治, 半空間上の重み付き多重調和ベルグマン空間, 2016 年度ポテンシャル論研究集会, 大同大学, 2016.
  26. 西尾昌治, 下村勝孝, Polyharmonic Bergman spaces on half spaces, 日本数学会秋期総合分科会, 2016.
  27. 西尾昌治, Toeplitz operators of radial measure symbol on the ball, 研究集会「ポテンシャル論とその関連分野」, 2016.
  28. 菱川洋介, 西尾昌治, 山田 雅博,  $L(a)$ -conjugates on parabolic Bloch spaces, 日本数学会 年会, 2016.
  29. M. Nishio and K. Tanaka, Harmonic Bergman space with radial measure weight on the ball, The Eighth Congress of Romanian Mathematicians, 2015.
  30. 西尾昌治, Reproducing kernel for iterated parabolic operators on the upper half space, 日本数学会秋期総合分科会, 2015.
  31. M. Nishio, Reproducing kernel for iterated parabolic operators on the upper half space with application to polyharmonic Bergman spaces, 2015 年度ポテンシャル論 研究集会, 2015.
  32. 西尾昌治, 半空間上の多重調和関数に関する再生核について, RIMS 研究集会「再生核の応用についての総合的な研究」, 2015.
  33. 菱川洋介, 西尾昌治, 山田雅博,  $L(a)$ -conjugates on parabolic Bloch spaces, ポテンシャル論 研究集会, 2015.

〔図書〕 (計 1 件)

1. A. Kohatsu-Higa and A. Takeuchi: Jump SDE's and the study of their densities - A self study book -, accepted by Springer. (Reviewed)

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：下村 勝孝

ローマ字氏名：(SHIMOMURA, katsunori)

所属研究機関名：茨城大学

部局名：理学部

職名：教授

研究者番号 (8桁)：00201559

研究分担者氏名：竹内 敦司

ローマ字氏名：(TAKEUCHI, atsushi)

所属研究機関名：大阪市立大学

部局名：大学院理学研究科

職名：准教授

研究者番号 (8桁)：30336755

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：山田 雅博

ローマ字氏名：(YAMADA, masahiro)

研究協力者氏名：菱川 洋介

ローマ字氏名：(HISHIKAWA, yosuke)

研究協力者氏名：田中 清喜

ローマ字氏名：(TANAKA, kiyoki)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。