2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 １２ 日現在

機関番号：３２６１３

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：１５Ｋ０４９３７

研究課題名（和文）経路積分ー時間分割近似法で切り拓く経路空間上の解析

研究課題名（英文）Path integrals-Analysis on path space opened by time slicing approximation

研究代表者

熊ノ郷　直人（Kumanogo, Naoto）

工学院大学・情報学部（情報工学部）・教授

研究者番号：４０２９６７７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：時間分割近似法を用いて、一般階放物型の相空間経路積分が数学的に厳密な意味をもつ一般的な汎関数の２つの集合を与えた。各々の汎関数の集合は和、積、平行移動、線形変換、汎関数微分に関して閉じている。さらに、その相空間経路積分において、使用する際に注意が必要であるが、積分との順序交換、極限操作との順序交換、経路の直交変換のもとでの自然な性質、運動量経路に関する平行移動のもとでの自然な性質、運動量経路に関する汎関数部分積分が有効である。

研究成果の学術的意義や社会的意義
相空間経路積分は、その有用性にも関わらず、数学的に測度が存在しないことや、物理的にも不確定原理があり位置と運動量を同時に確定できないこと、形式的に式変形すると誤った結論を導くことなど問題点が指摘されている。相空間経路積分の研究は、シュレディンガー方程式に対する研究が多いが、今回の研究は、一般階の変数係数放物型方程式に対する研究で、しかも、相空間経路積分が数学的に存在する一般的な汎関数の集合を与え、その相空間経路積分で数学的に可能となる演算を与えている点に特徴がある。

研究成果の概要（英文）：Using the time slicing approximation, we gave two sets of general functionals for which the phase space path integrals of general-order parabolic type have a mathematically rigorous meaning. Each sets of functionals is closed under addition, multiplication, translation, linear transformation and functional differentiation. Furthermore, in the phase space path integrals, though we need to pay attention for use, the interchange of order with integrals, the interchange of order with limit operations, the natural property under orthogonal transformations with respect to paths, the natural property under translations with respect to momentum paths, and the functional integration by parts formula with respect to momentum paths, are valid.

研究分野：解析学基礎

キーワード：経路積分　関数方程式論　関数解析学　擬微分作用素　数理物理　振動積分　フーリエ積分作用素　確率解析

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

1948 年 R. P. Feynman は、シュレディンガー方程式の基本解を経路積分で表現し、ハミルトン形式で定式化されつつあった量子力学に、ラングランジュ形式による別の定式化を与えた。Feynman は経路積分をすべての経路に関する新しい和であると主張し、有限次元積分の極限として説明した。この方法は現在、時間分割近似法と呼ばれている。さらに Feynman は一般的な汎関数を振幅としてもつ経路積分を考え、経路積分と汎関数微分からなる経路空間上の新しい解析学を提案した。しかし 1960 年 R. H. Cameron は、経路積分の測度が数学的に存在しないことを証明した。数学において測度を用いると積分の存在や性質が保証できるが、Cameron の結果は、経路積分において、こうした数学的議論が不可能であることを意味する。また一方で Feynman はハミルトン形式の相空間経路積分も提案している。しかし相空間の場合、物理的にも位置と運動量を同時に定義できない不確定性原理があり、相空間経路積分の解釈は様々で、形式的に式変形すると誤った結果を導くことも指摘されている。

こうした背景から、私の研究の全体構想は、測度の代わりに最初のアイデアである時間分割近似法を用いて、経路積分の存在とその許される性質を数学的に証明し、経路積分と汎関数微分からなる経路空間上の解析学を構成することである。これまでの研究で私は、シュレディンガー方程式に対して、区分的定数経路による時間分割近似法を用いて、相空間経路積分が存在する一般的な汎関数の２つの集合を与えた。各々の汎関数の集合は、不確定性原理にかかわる汎関数を排除しているため、和や積、経路の平行移動や経路の線形変換、汎関数微分の演算に関して閉じている。このため、経路積分可能な多くの汎関数を創ることができる。相空間経路積分で可能な演算は物理的に曖昧であったが、積分との順序交換、極限との順序交換、経路の平行移動や直交変換に関する自然な性質、汎関数微分に関する部分積分など成立する演算を数学的に明確化した。さらに私は、一般階の変数係数放物型方程式に対して、区分的定数経路による時間分割近似法を用いて、相空間経路積分が存在する一般的な汎関数の集合を与えた。この汎関数の集合は和と積の演算に関して閉じている。また、振幅とする汎関数が 1 の場合の相空間経路積分は放物型方程式の基本解となる。しかし、一般階の変数係数放物型方程式の場合、運動量変数のオーダーを考える必要があり、経路の平行移動や経路の線形変換、汎関数微分などの演算は扱えていなかった。

２．研究の目的

研究の全体構想は「時間分割近似法による経路空間上の解析学の構成」である。これまで私は、擬微分作用素の理論を時間分割近似法に適用し、物理で用いられているシュレディンガー方程式の経路積分の存在や性質を数学的に正当化してきた。しかし擬微分作用素は元々、相空間の関数で様々な偏微分方程式を扱う一般理論であり、さらに最近、環状型やリー群型など対称性を元に新しい形の擬微分作用素も提案されている。一方、相空間経路積分は、位置と運動量を同時に定義できない不確定性原理があり、物理的にも解釈は様々である。本研究では、これまでとは逆に、時間分割近似法を様々な形の擬微分作用素に適用し、数学的存在だけの観点から様々な形の経路積分を創造し、数学的正当性の観点から経路積分の性質を提案し、経路空間上の解析学の世界を切り拓いていくことが目的である。

３．研究の方法

相空間経路積分の時間分割近似法のアイデアを、一般階の変数係数放物型方程式に対する擬微分作用素に適用することから始めた。相空間経路積分の存在、つまり時間分割近似法の収束を示す場合、時間分割近似法の大きな次元の多重積分を、擬微分作用素の多重積の観点から主部と余りに分け、この主部と余りが、まず次元の定数乗で評価できるように、次に、次元によらない定数で評価できるように、さらに、時間分割の幅がゼロに近づくとき収束するように、振幅とする汎関数に適宜条件を加えていき、その条件をそのまま一般的な汎関数の集合の定義とするのであるが、何度も設定を変えて収束の計算をやり直す中で、以前の研究で、なるべく一般的な放物型方程式を扱うために一般化していた擬微分作用素の尺度関数を基本となる尺度関数に限定すれば、収束するための汎関数の条件が、和や積の演算だけではなく、経路の平行移動や経路の正則線形変換、経路に関する汎関数微分といった演算についても閉じた条件になることに気づいた。証明では、関数の微分の評価の際に、区分的定数経路の性質を用いることが鍵となった。

さらに、この条件で定義される一般的な汎関数を振幅としてもつ一般階の変数係数放物型方程式に対する相空間経路積分について、積分との順序交換や極限との順序交換だけではなく、経路の直交変換や経路の平行移動に関する性質、汎関数微分に関する部分積分などの演算を数学的に正当化できないかと考えた。何度も設定を変えて最初から計算をやり直すうちに、最初に前提としていた変数係数放物型方程式のハミルトン関数の時間に関する連続性を区分的連続性に緩めて最初から計算をやり直せば、この相空間経路積分において、積分との順序交換や極限との順序交換だけではなく、経路の直交変換、運動量経路に関する平行移動、運動量経路の汎関数微分に関する部分積分などの演算が成立することを証明できることに気づいた。また、位置経路の平行移動や位置経路の汎関数微分に関しては、シュレディンガー方程式の場合、前提となるハミルトン関数が位置と運動量について対称的な関係があり成立したが、一般階の変数係数放物型方程式の場合、漸近展開で運動量変数のオーダーを落とす必要があり、前提とな

るハミルトン関数が位置と運動量について対称的でないため、構成した相空間経路積分の性質も位置と運動量に対して対称的にならないと考えた。

４．研究成果

区分的定数経路による時間分割近似法を用いて、一般階の変数係数放物型方程式に対応する相空間経路積分が数学的意味をもつ一般的な汎関数の２つの集合を与えた。より正確に言えば、各々の集合に属する任意の汎関数を振幅としてもつ相空間経路積分の時間分割近似法は、位置経路の終点と運動量経路の始点に関して、広義一様収束する。つまり、相空間経路積分は数学的に存在する。特に、振幅とする汎関数が１の場合の相空間経路積分は放物型方程式の基本解となる。

一般的な汎関数の２つの集合は、放物型方程式の基本解となる１という汎関数や、時間に関する積分を表す汎関数を共通部分として含むが、不確定性原理を避けるため、一方の集合は、ある時刻での位置を表す汎関数を含むが、ある時刻での運動量を表す汎関数を含まず、もう一方の集合は、ある時刻での位置を表す汎関数を含まないが、ある時刻での運動量を表す汎関数を含むように構成した。さらに、それぞれの汎関数の集合は、和や積、経路に関する平行移動、経路に関する正則線形変換、経路に関する汎関数微分の演算に関して閉じている。このため、多くの相空間経路積分可能な汎関数を創ることができる。特に、何回でも汎関数微分できる。この汎関数の集合の構成においては、なるべく多くの放物型方程式を扱うために一般化していた尺度関数を基本的な尺度関数に限定したことにより、平行移動や正則線形変換、汎関数微分など汎関数の集合上で許される演算が豊富になった。

相空間型の場合、位置と運動量を同時に測定できない不確定性原理があり、しかも一般階の放物型方程式の場合は位置変数と運動量変数が対称的でないため、使用する際には注意が必要であるが、この相空間経路積分において、積分との順序交換定理、極限との順序交換定理に加え、経路の直交変換における自然な性質、運動量経路の平行移動における自然な性質、運動量経路に関する汎関数微分の部分積分など可能となる演算を示した。特に、これまでの研究で前提としていたハミルトン関数の連続性を区分的連続性に緩めて最初から相空間経路積分の構成をやり直したことで、運動量経路に関する平行移動や汎関数微分の部分積分が可能となった。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3 件）

① Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals of parabolic type with smooth functional derivatives、Bulletin des Sciences Mathématiques、153 巻、2019、pp.1－27.

https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2019.01.012

② 熊ノ郷　直人、Phase space Feynman path integrals of parabolic type、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、2101 巻、2019、pp.52—63.

③ 熊ノ郷　直人、経路積分—時間分割近似法で切り拓く経路空間上の解析—、数学、査読有、70 巻、2018、pp.129－158

〔学会発表〕（計　11 件）

① Naoto Kumano-go, Phase space Feynman path integrals of parabolic type with smooth functional derivatives, RIMS 共同研究（公開型） 代数解析学の諸問題-超局所解析及び漸近解析-, 2018 年 10 月 16 日.

② Naoto Kumano-go, Phase space Feynman path integrals, 19th Annual Workshop on Applications and Generalizations of Complex Analysis, 2018 年 3 月 24 日.

③ 熊ノ郷 直人, Feynman 経路積分ー時間分割近似法による経路空間上の解析, 研究集会「量子論にまつわる数学と数論の連携探索 2018」、早稲田大学, 2018 年 3 月 3 日.

④ 熊ノ郷 直人, Phase space Feynman path integrals of parabolic type with functional derivatives, RIMS 共同研究（公開型）「超局所解析と漸近解析」, 京都大学数理解析研究所, 2017 年 10 月 20 日.

⑤ Naoto Kumano-go, Phase space Feynman path integrals of higher order parabolic type with general functional as integrand, The 9th Nagoya Workshop on Differential Equations, **名古屋大学**, 2017 **年** 3 **月** 21 **日**.

⑥ Naoto Kumano-go, Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation, Workshop "Path Integration in Complex Dynamical Systems", Lorentz Center, Leiden, Netherland, 2017 **年** 2 **月** 10 **日**.

⑦ Naoto Kumano-go, Phase space path integral of higher order parabolic type with general functional as integrand, The 14th Linear and Nonlinear Waves, **ピアザ淡海**, 2016 **年** 11 **月** 2 **日**.

⑧ Naoto Kumano-go, Phase space path integral of higher order parabolic type with general functional as integrand, Workshop on Differential Equations in Hiroshima, **広島大学**, 2016 **年** 10 **月** 15 **日**.

⑨ Naoto Kumano-go, Phase space path integral of higer order parabolic type with general functional as integrand, "New development of microlocal analysis and singular perturbation theory", **京都大学数理解析研究所**, 2016 **年** 10 **月** 4 **日**.

⑩ Naoto Kumano-go, Phase space Feynman path integrals of higher order parabolic type with general functional as integrand, Workshop “Geometric and Singular Analysis”, The University of Potsdam, 2016 **年** 3 **月** 11 **日**.

⑪ Naoto Kumano-go, Phase space Feynman path integrals of higher order parabolic type, Workshop “Feynman integral with harmonic analysis and related topics”, CAMP, NIMS, Daejeon, Korea, 2015 **年** 5 **月** 20 **日**.

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。