

令和元年6月22日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04941

研究課題名(和文) マルコフ過程の経路のSemi-Dirichlet形式を用いた汎関数解析

研究課題名(英文) Functional analysis for paths of Markov processes via semi-Dirichlet forms

研究代表者

上村 稔大 (Toshihiro, Uemura)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：30285332

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：ランダムな現象を解析する数学モデルの一つである確率過程の構成法として知られているDirichlet形式の手法を用いて、マルコフ過程の大域的性質(再帰性・過渡性・保存性)を導出した。具体的には、基礎の空間の測度の増大性と対応する生成作用素の係数の遠方での増大性によって決定できることを示した。また、マルコフ過程の系列に対して、それらの諸性質についての安定性についても議論を行った。特に、大域的性質はMosco収束と呼ばれる収束性の下ではほとんどすべての性質の安定性が壊れることが分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

‘連続的变化’の破綻が起きる状況において、標本路が連続であるという拡散過程に限らず、不連続な状況を許容したジャンプ拡散過程、あるいは純飛躍型過程をモデル化した解析の研究が必要である現代において、当該研究はその先駆けともいえる研究である。また、拡散係数や、Levy係数などが滑らかでない場合においては、モデル化される確率過程の構成さえ自明ではない。Dirichlet形式は、そのような場合においても、正則性と呼ばれる条件さえ満たされれば確率過程が構成できるという優位性がある。

研究成果の概要(英文)：Global path properties, such as recurrence, transience and conservativeness, of Markov processes associated with Dirichlet forms are obtained in terms of the volume growth of balls with respect to the basic measure and the behaviors at the infinity of the coefficients of the infinitesimal generator associated with the processes. Moreover, we revealed the instability of such global path properties under Mosco's convergence of Markov processes.

研究分野：確率過程論

キーワード：Dirichlet形式 マルコフ過程 加法汎関数

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

ランダムな現象を解析する数学モデルの一つとして確率過程論(特にマルコフ過程)の研究において、標本路が時間に関して不連続であるようなマルコフ過程の研究が急速に注目を浴びてきている。実際、数理ファイナンスにおいて重要な公式として知られているブラック・ショールズ式が、拡散過程の一種である幾何ブラウン運動を基礎の上に成立していることは周知の事実である。ところが、1998年のロシア財政危機に端を発した世界的な株価の急激な下落、2001年の全米同時多発テロ、所謂9.11のテロ直後の株価の暴落、更には2008年におきた、サブプライムローン破綻によるニューヨーク株価大暴落などや、突然の大地震など自然災害によって引き起こされる社会活動の一時停止、予測不可能な事件・事故などにより、それまでの“連続的变化”の破綻が相次いで発生する状況において、標本路が連続であるという拡散過程によるモデル化の不適合性が指摘されて始めている。

近年、ますますそのような予測不可能な突然の不連続、それも大きな振れ幅で事故や事件が頻繁に起こり得ることが予想される現代においては、積極的にその不連続な状況を土台としたモデルの構築を行う必要がある。

最近では、対称安定過程、Levy過程、及びそれらの一般化である、純飛躍型のマルコフ過程、およびそれらより構成される加法汎関数に対する確率解析の研究が精力的に行われるようになってきた。更には、数理物理学の分野などでは、ブラウン運動に代わり、このような飛躍を持つマルコフ過程の構成が要請されてきており、またそれを土台とする“不変”測度の存在を探求する研究が数多く行われて来ている。

### 2. 研究の目的

本研究は、(半)ディリクレ形式の理論を援用して、対応する拡散過程、純飛躍型マルコフ過程あるいは、ジャンプ拡散過程の構成と、その標本路に対する大域的性質を研究しようとするものである。具体的には、拡散データ、飛躍率及び基礎の測度の体積の増大度の条件によって保存性・再帰性の条件を導出することを試みる。また、porous mediaにおける熱の拡散や浸透圧流が、均質な物質やユークリッド空間の領域などにおけるそれとは本質的に異なることが知られているが、領域を動く粒子が飛躍を伴って移動するモデルに対してどのようなことが起きるのかについて研究を進める。特に、空間に微分構造がないような領域上の熱の伝搬などの詳しい解析は、ほぼ手つかずの状況であると思われる。そこで、まずは均質な物質、あるいはユークリッド空間の領域上で定義される飛躍型のマルコフ過程について、均質化問題について検討する。

### 3. 研究の方法

ディリクレ形式においては、福島存在定理により、「正則性」の条件の下で、Dirichlet形式と、強マルコフ過程、具体的にはHunt過程とが1対1に対応することが知られている。これは、確率微分方程式や、マルチンゲール問題など、これまで知られている確率過程の構成方法と異なり、拡散係数、あるいはLevy密度の係数の滑らかさの条件を要求しないで構成が行える利点があるため、ジャンプ拡散過程の構成を、それらの係数に対して、弱い条件のもとで構成を行う。また、構成したマルコフ過程の大域的性質の一つである保存性の導出に関しては、対称な場合に、大島の評価基準として知られている条件を、非対称な場合に拡張した上で、係数の遠方での挙動と領域の基礎の測度の体積増大度を用いて導出する。また、マルコフ過程の系列の大域的性質の安定性について、対応するDirichlet形式に対するMosco収束の手法を用いて検討する。Mosco収束は、対応するマルコフ過程の系列の有限次元分布の収束と同値であるため、その収束性の下で、マルコフ過程の経路の大域的性質が安定的かどうかを考えることになる。さらに、正則Dirichlet

形式の正則部分空間の一意性についても検討する。その際、正則部分空間の系列に対する Mosco 収束を、マルコフ過程を特徴づける特性集合の単調性の仮定の下で導くことも併せて検討する。

#### 4. 研究成果

主な発表論文等に行った発表論文の成果内容について順番に簡単に解説していく。

(1) この論文では、与えられた Dirichlet 形式の正則部分空間の系列に対応する拡散過程の系列に対する弱収束を導出した。その有限次元分布の収束の証明には、正則部分空間を特徴づける特性集合の単調性の仮定の下、Dirichlet 形式に対する、単調収束定理を用いた。

(2) 正則な、下に有界な半 Dirichlet 形式に対応するマルコフ過程のあるクラス、具体的には、(対称とは限らない)拡散過程、ジャンプ拡散過程、及び飛躍型過程を含むマルコフ過程のあるクラスに対して、統一的な手法に基づいて、それらの保存性を導出することに成功した。具体的には、基礎となる測度の体積増大度と拡散係数、あるいは Levy 密度の係数の遠方での挙動を用いて導出した。また、幾つかの具体例については既存の結果を拡張することにも成功した。

(3) この論文では、局所的に一様楕円型の対称拡散過程、対称な Levy 過程、また対称な飛躍型マルコフ過程に対応する Dirichlet 形式のそれぞれの系列に対して、Mosco 収束するための十分条件を与えることに成功した。特にそれぞれの確率過程を特徴づける係数の系列の収束の条件として局所積分の収束性の条件を課すことだけで収束性を導出できることを示せたのは画期的な結果であると思われる。また、それにより、対応するマルコフ過程の経路の大域的性質が、Mosco 収束の下では一般に、安定的でないことが判明した。論文には、そのような例を提示した。具体的には、系列のマルコフ過程が再帰的 (resp. 過渡的、保存的) であるものの、Mosco 収束の極限として現れる確率過程が過渡的 (resp. 再帰的、保存的でない) なるような例を構成した。

(4) この論文では、対称な純飛躍型のマルコフ過程に対応する対称 Dirichlet 形式に対する再帰性の評価基準及び関連する容量不等式を、基礎の測度に対する体積評価を用いて導出した。その上で、 $\mu$  集合と呼ばれる一様に均質とは限らない領域上の純飛躍型マルコフ過程の再帰性の例をいくつか提示することに成功した。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Li Liping, Toshihiro Uemura and Jiangang Ying, Weak convergence of regular Dirichlet subspaces, *Osaka Journal of Mathematics*, 査読有, Vol.54, 2017, 435-455
- ② Yoichi Oshima and Toshihiro Uemura, On the Conservativeness of Some Markov Processes, *Potential Analysis*, 査読有, vol.46, 2017, 609-645
- ③ Kohei Suzuki and Toshihiro Uemura, On instability of global path properties of symmetric Dirichlet forms under Mosco convergence, *Osaka Journal of Mathematics*, 査読有, vol. 53, 2016, 567-590
- ④ Hiroyuki Okura and Toshihiro Uemura, On the recurrence of symmetric jump processes, *Forum Mathematicum*, 査読有, vol. 27, 2015, 3269-3300
- ⑤ Zhen-Qing Chen, Niels Jacob, Masayoshi Takeda and Toshihiro Uemura, The mathematical work of Masatoshi Fukushima - An Essay, In Festschrift Masatoshi Fukushima -In Honor of Masatoshi Fukushima's Sanju-, Interdisciplinary Mathematical Sciences: Vol.17, 査読なし, World Scientific, pp.3-12, 2015

〔学会発表〕（計 11 件）

- ① Rene Schilling and Toshihiro Uemura, Homogenization of symmetric Levy processes on  $R_d$ , 日本数学会 2019 年度 年会, 2019 年3 月17 日-- 3 月20 日, 東京工業大学, 日本
- ② Matsuyo Tomisaki and Toshihiro Uemura, Homogenization of symmetric Dirichlet forms, マルコフ過程とその周辺, 2019 年 1月11 日 -- 1 月31 日, まちなかキャンパス長岡 3 階301 会議室, 日本
- ③ Matsuyo Tomisaki and Toshihiro Uemura, On Convergence of Symmetric Dirichlet Forms, Probability afternoon, 2018 年 11 月1 日, Technische Universität Dresden, Germany
- ④ Yuki Inagaki and Toshihiro Uemura, On a compact embedding of Dirichlet spaces of Ornstein-Uhlenbeck semigroups with jumps, The 13<sup>th</sup> International Symposium in Science and Technology at Cheng Shiu University 2018, 2018 年8 月9 日-8 月11 日, 正修科技大学, 台湾
- ⑤ Toshihiro Uemura, A homogenization perspective on convergence, Welsh Probability Seminar, 2018 年2 月26 日, Swansea University, UK
- ⑥ Matsuyo Tomisaki and Toshihiro Uemura, On Convergence of Symmetric Dirichlet Forms, Tokyo-Seoul Conference in Mathematics, 2017 年12 月8 日-12 月9 日, 東京大学, 日本
- ⑦ Toshihiro Uemura, Gamma-convergence of symmetric jump-type Dirichlet forms, Workshop on Jump Processes and Stochastic Analysis 2017, 2017 年9 月1 日-9 月2 日, Technische Universität Dresden, Germany
- ⑧ Yoichi Oshima and Toshihiro Uemura, On the conservativeness of some Markov Processes, Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017, 2017 年 9 月 4 日 - 9 月 8 日, Technische Universität Kaiserslautern, Germany
- ⑨ Hiroki Nishihara and Toshihiro Uemura, On an optimal stopping problem and a variational inequality, Workshop on Stochastic Analysis and related topics 2016, 2016 年 5 月9 日-5 月10 日, Technische Universität Dresden, German
- ⑩ Toshihiro Uemura, On a weak convergence of regular Dirichlet subspaces of  $H_1(I)$ , マルコフ過程とその周辺, ヴェルク横須賀 4F 第2 研修室, 2016 年1月9 日-1 月11 日, 日本
- ⑪ Toshihiro Uemura, On the Mosco convergence of symmetric jump type Dirichlet forms, The 11th Workshop on Markov Processes and Related Topics, 2015 年6 月27 日- 6 月30 日, Shanghai Jiao Tong University, 中国

〔その他〕

ホームページ等

<http://gakujo.kansai-u.ac.jp/search/index.jsp>

6. 研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。