

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04957

研究課題名(和文) 流体及び電磁流体力学に現れる境界値問題の数学的構造の解明

研究課題名(英文) Studies on mathematical structure of boundary value problems appearing in hydrodynamics and magnetohydrodynamics

研究代表者

柳沢 卓 (YANAGISAWA, Taku)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：30192389

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：流体及び電磁流体力学に現れる幾つかの境界値問題を対象に、次の3点の数学的連関を明らかにすることを目指して研究を進めた：(i) 方程式の非線型構造、(ii) 境界条件の設定、(iii) 領域の幾何構造。具体的な研究成果は以下の通りである。

(1) 非斉次境界条件下の定常MHD方程式の境界値問題に対して、その弱解の存在と安定性を示した。(2) 3次元外部領域上の r 乗可積分な調和ベクトル場全体のなす空間の、領域位相不変量による特徴づけを与えた。この結果は、外部領域上のHodge分解定理を構築する際の基礎となると考える。

研究成果の概要(英文)：This research was intended as an attempt to study the relations, from a mathematical standpoint, between the following three issues on the boundary value problems appearing in the hydrodynamics and magnetohydrodynamics (MHD)：(i) the nonlinear structure of equations, (ii) the setting of boundary conditions, (iii) the geometrical structure of domains. Our results obtained in this reserach can be listed below.

(1) We proved the existence and the stability of weak solutions of stationary MHD equations under inhomogeneous boundary conditions.(2) We gave a characterization of harmonic vector fields in three dimensional exterior domain by topological invariants of exterior domains. This result shall be a base for establishing Hodge decomposition theorem for exterior domains.

研究分野：非線型解析学

キーワード：境界値問題 MHD方程式 安定性 Hodge分解 調和ベクトル場

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、これまで流体及び電磁流体力学における非線型偏微分方程式を対象に、その初期境界値問題あるいは境界値問題の存在定理に関わる研究を主に進めてきた。特に当研究開始時までには、早稲田大学の小園英雄氏と共に、有界領域上の L^r -ベクトル場の Hodge 分解定理を提出し、その応用として (a) 非斉次境界条件下における定常 Navier-Stokes 方程式の解の存在定理、(b) 大域的な Div-Curl lemma、(c) 一般化された Lax-Milgram theorem 等の結果を得ることが出来た。これらの諸結果においては、いずれも対象となる有界領域上の調和ベクトル空間が重要な役割を果たしており、特に、Betti 数を通して領域の幾何学が境界値問題の解空間の構造と深く関連すること等が明らかになった。また、上記 (a) に挙げた非斉次境界条件下の定常 Navier-Stokes 方程式については、回転群の不変ハール測度による平均化の議論を通すことによって、その弱解の構成的存在証明と領域の幾何学的性質とが密接に関係することも明らかになってきた。

また、科研費基盤 (C) 一般「分解定理に基づく流体及び電磁気現象の統一的解析方法の展開」(H24~H26)(研究代表者:柳沢卓)における研究では、上で述べた分解定理を用いた解析手法を磁気流体力学方程式 (MHD 方程式) に適用して、定常解の存在を示したのち、その定常解の安定性解析を開始した。

一方、科研費基盤 (C) 一般「特異摂動極限として流体及び電磁気学に現れる双曲系境界値問題」(H14~H15) において行った圧縮性粘性流体の非粘性極限問題 (特に境界層の安定性) に関する試行的考察も本研究の目的と繋がっている。

関連する海外および国内の研究としては、研究開始当初において、我々の提出した分解定理を用いて幾つかの非線型境界値問題の解の存在証明を行った論文が既に 20 本程度公表されていた。

2. 研究の目的

流体及び電磁流体力学に現れる種々の境界値問題を対象に以下にあげる 3 つの問題に対する考察を通して、境界値問題を構成する (i) 方程式の非線型構造、(ii) 境界条件の設定、(iii) 領域の幾何構造との数学的連関、を明らかにすることを目的とする。

- (1) 定常解の存在に関わる問題
- (2) 定常解の安定性に関わる問題
- (3) 物理的パラメータの極限を取ることにより現れる特異極限問題

上記の 3 問題について具体的に研究目的は以下の通り：

- (1) 定常解の存在に関わる問題

非斉次境界条件下の定常 Navier-Stokes 方程式に対する境界値問題の弱解の構成的存在証明において本質的となる Leray の不等式が成立することと領域の幾何学的性質と

の関係を調べる。特に、領域及び解が種々の対称性を持つ場合に、Leray の不等式が成立するか否かを考察する。

非斉次境界条件下の定常 MHD 方程式に対する境界値問題の存在を、粘性係数または (かつ) 磁気抵抗係数を 0 とした場合にも進める。

2 次元定常 Navier-Stokes 方程式の非斉次境界値問題に対して決定的結果を与えた Korobkov, Pileckas, Russo の論文 (Ann. of Math., 2015) において用いられた解析手法を理解し、流体力学等に現れる他の境界値問題への適用可能性を探る。

- (2) 定常問題の安定性に関わる問題に対して

非斉次境界条件下の定常 MHD 方程式の解の安定性に関する考察を進める。特に、境界データが必ずしも小さくない場合にも、領域の幾何学的性質によっては安定な定常解が存在する具体例を見つけることを目標とする。

熱効果も考慮した 1 次元圧縮性粘性流体の定常解を分類し、その安定性を検証する。特に、粘性係数が 0 で熱拡散係数が正の場合の考察を進める。

上記、に現れる放物型、放物双曲型方程式系の初期境界値問題の適切性について考察する。

- (3) 物理的パラメータの極限をとりことにより現れる特異極限問題に関して

Zhouping Xin との共著論文 (CPAM, 1999) で扱った問題を具体例として含む一般の放物型双曲型方程式系の初期境界値問題を対象に、その特異極限問題を考察する。特に、双曲型方程式系の境界値問題を特異極限問題として捉えることにより、数学的にも物理学的にも適切な境界条件を導出する枠組みを構築できないか、検討を進める。

特異極限問題に現れる境界層を、方程式系、境界条件および境界の幾何から分類できないかを、検討する。

3. 研究の方法

研究目的を達成する為、研究代表者は流体及び電磁流体力学に現れる Navier-Stokes 方程式、MHD 方程式、圧縮性粘性流体の方程式に対する境界値問題を主な対象とする次の研究を順次遂行していく。

- (1) 上記境界値問題の定常解の存在に関する研究 (主に平成 27 年度)

具体的には、以下の計画・方法により研究を進める。

3 次元領域が軸対称性あるいは面对称性をもち、境界データも同様の対称性をもつとき、Leray の不等式が成立するか否かの考察を行う。

粘性係数あるいは磁気抵抗係数が 0 になった時の、非斉次境界条件下の定常 MHD 方程式に対する境界値問題の存在定理の提出を目指す。

2次元定常 Navier-Stokes 方程式の非斉次境界値問題に関する Korobkov, Pileckas, Russo の論文で用いられた解析手法の詳細な検証を行う。

(2) 定常解の安定性に関する研究(主に平成 28 年度)

非斉次境界条件下の定常 MHD 方程式に対して、粘性係数と磁気抵抗係数が共に正の場合、および上記(1)で考察した場合の定常解の安定性解析を行う。

熱効果を考慮した 1次元圧縮性粘性流体方程式に対する初期境界値問題の定常解を分類する。特に、粘性係数が 0 で熱拡散係数が正の場合考察を進める。

(3) 特異摂動法を通して、(1),(2)で扱った境界値問題の間の関係を探る研究(主に平成 29 年度)

具体的には線型化圧縮性粘性流に対する非粘性極限問題を具体例として含む一般的な放物型 双曲型方程式の特異摂動極限問題を提出し、上記の(1),(2)で扱った(初期)境界値問題の漸近的關係を明らかにする。

4. 研究成果

(1) 磁気流体力学(MHD)方程式の定常境界値問題に対して次のことを明らかにした。

非斉次境界条件下の弱解の構成的存在証明において本質的となる Leray の不等式を磁場の影響を取り込んだ形で提示した。

で示した Leray の不等式が成立する為の幾つかの十分条件を境界データに関わる形で与えた。更にこの結果を基に、定常解の弱解の存在定理を示した。

で得られた定常弱解の安定性解析を行った。特に、領域境界の 1次 Betti 数が 0 でないとき(例えば、領域がトーラスの内部からなる有界領域のとき)、任意の大きさの磁場ベクトルをもつ安定な定常弱解が少なくとも一つ存在することを示した。本結果は、MHD 方程式の境界値問題に対して、解空間の構造と領域の位相的性質との関係を明示的に与えている点で興味あるものと考えている。

この結果の報告は、既に 2つの国際研究集会において行っている。論文は、現在準備中である。

上記との結果において、透磁率を 0 と出来ることを確認した。しかし、粘性係数あるいは磁気抵抗係数を 0 にした場合における明確な結果は得られなかった。

(2) 2次元定常 Navier-Stokes 方程式の非斉次境界値問題に関する Korobkov, Pileckas, Russo の論文で用いられた解析手法の詳細な検証を行った。具体的には、Morse-Sard の定理の改良形と 2次元領域上の連続関数の level set 全体のなす集合に対する Kronrod の結果を巧妙な組み合わせた解析手法の検証を行った。

(3) 当初の研究目的には入っていなかったが、3次元外部領域上の r 乗可積分な調和ベクトルのなす空間について、以下の結果を得た。以下、 r は常に 1 より大きな実数とする。

境界上でベクトル場が接線方向成分しかもたない場合、および法線方向成分しかもたない場合、どちらにおいても外部領域上の r 乗可積分な調和ベクトル場全体のなす空間は有限次元となる。

境界上で接線方向成分しかもたない r 乗可積分な調和ベクトル場全体のなす空間の次元は、領域境界の 2次 Betti の数に等しい。

境界上で法線方向成分しかもたない r 乗可積分な調和ベクトル場全体のなす空間の次元は、 r が $3/2$ より大きいときは領域境界の 1次 Betti 数に等しい。一方、 r が $3/2$ 以下のときは、その次元は「1次 Betti 数-1」に等しい。

以上の結果により、3次元外部領域上の調和ベクトル場全体のなす空間の、領域の位相的不変量による特徴づけが完全に与えられたことになる。今後、この結果を、外部領域上の Hodge 分解定理の導出と外部領域上の Navier-Stokes 方程式に対する新たな解析手法の提示に繋げていきたいと考えている。

この研究は、小園英雄氏(早大)、清水扇丈氏(京大)、Matthias Hieber 氏、Anton Seyfert 氏(Darmstadt 工科大学)との共同研究によるものである。結果報告は、既に国内及び国際研究集会で行っており、論文も現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 4 件)

発表者: Taku Yanagisawa

発表表題: On the stability of stationary solutions of MHD equations with large boundary data

研究集会名: RIMS Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gasdynamics, RIMS Kyoto University, Japan (国際学会, 招待講演)

発表年: 2015

発表者: Taku Yanagisawa

発表表題: On the existence and stability of stationary MHD equations under the inhomogeneous boundary conditions

研究集会名: The Navier Stokes Equations and Related Topics, Nagoya University, Japan (国際学会, 招待講演)

発表年: 2016

発表者：柳沢 卓
発表表題：外部領域上の調和ベクトル場のなす空間について
研究集会名：第 6 回岐阜数理科学研究会, 岐阜市 (招待講演)
発表年：2017

発表者：Taku Yanagisawa
発表表題：Characterization of the space of harmonic vector fields over exterior domains,
研究集会名：The 35th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations, Nishijin Plaza, Kyushu University, Japan (国際学会, 招待講演)
発表年：2018

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

○科研費を使用して開催した国際研究集会
研究集会名：Free Boundary Problems in Fluid and Plasma Dynamics,
講演者：Paolo Secchi (Brescia University, Italy) (4 Lectures)
Yoshihiro Shibata (Waseda University)
Tetu Makino (Yamaguchi University)
Tatsuo Iguchi (Keio University)
Hiroki Ueno (Keio University)
Abulizi Aihaiti (Kyushu University)
開催年月日：2016 年 2 月 3 日 ~ 2 月 4 日
開催場所：奈良女子大学理学部数学教室

○科研費を使用して開催したセミナー
セミナー名：奈良女子大学 PDE セミナー
講演者：Michael Dreher (Rostock University, Germany)
開催年月日：2017 年 9 月 7, 8 日
開催場所：奈良女子大学理学部数学教室

セミナー名：奈良女子大学 PDE セミナー
講演者：前川泰則 (京都大・理), 檜垣充朗 (京都大・理)
開催年月日：2018 年 2 月 7 日
開催場所：奈良女子大学理学部数学教室

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柳沢 卓 (YANAGISAWA Taku)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：30192389

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし