

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04960

研究課題名（和文）周期的およびランダムな磁場付きシュレディンガー作用素のスペクトル

研究課題名（英文）Spectrum for periodic or random magnetic Scrodinger operators

研究代表者

野村 祐司 (Nomura, Yuji)

兵庫県立大学・物質理学研究科・教授

研究者番号：40282818

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：d次元格子および正則無限ツリー上の有限ポテンシャルをもつ離散シュレディンガー作用素の固有値の個数を明示する公式を示した。連続スペクトルの中に埋込まれた固有値、閾値レゾナンスをもつポテンシャルの全体の集合（Persistent多様体）を決定し、その幾何構造と元の作用素のスペクトルとの相互関係についての研究をした。

一般のポテンシャルの場合の閾値レゾナンス関数の漸近挙動と連続スペクトル内にある双曲的閾値レゾナンスの存在性、および極限吸収原理の成立について証明した。

2次元ユークリッド平面状のランダムなAharonov-Bohm磁場をもつシュレディンガー作用素のLifshitz tailを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

シュレディンガー作用素は、量子力学におけるもっとも基本的な作用素であり、そのスペクトルを調べることは数学のみならず、物理的にも非常に重要である。特に離散グラフ上のシュレディンガー作用素は、カーボンナノチューブやトポロジカル絶縁体とも密接に関係しており、そのスペクトルの解明は他方面の応用も期待される。特にレゾナンスの精密な挙動や、離散シュレディンガー作用素は特有の双曲型閾値の研究は未解明なことも多く、これに関する結果は重要なものと思われる。

研究成果の概要（英文）：On the d-dimensional lattice and the r-regular tree, an exact expression for the number of discrete eigenvalues of a discrete Schrodinger operator with a finitely supported potential was obtained. We characterized the set of potentials with embedded eigenvalues or resonances (this set was called Persistent varieties). Moreover we researched relations between geometric properties of Persistent varieties and the spectrum of the operators. We proved the asymptotic behavior of resonance states and studied the existence of resonance and the limiting absorption principle at hyperbolic thresholds. We showed the Lifshitz tail for random Aharonov-Bohm magnetic Schrodinger operators.

研究分野：関数解析学

キーワード：シュレディンガー作用素 スペクトル 埋蔵固有値 閾値レゾナンス 双曲型閾値 Lifshitz tail ランダムAharonov-Bohm磁場

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

周期的またはランダムポテンシャルを持つシュレディンガー作用素は、量子力学、特に物性論における重要な作用素であり、金属結晶中や不純物を含む物質中の電子の挙動を記述するものと考えられる。数学的には、周期関数または確率変数を係数に持つ微分(差分)作用素のスペクトルの研究である。周期ポテンシャルについては Floquet 理論(Bloch 理論)があり、ランダムポテンシャルに関しては、アンダーソン局在の存在や、小谷眞一による一次元系における精緻な理論(小谷理論) J. Bourgain による概周期ポテンシャルの場合の局在性やリヤプノフ指数の実解析的研究、状態密度関数の滑らかさとポテンシャルの分布との関連、局在領域における固有値分布の研究や、時間発展の漸近挙動の研究が進展してきた。最近では A. Avila や S. Jitomirskaya による almost Mathieu 作用素のスペクトルの研究も著名である。

●一方、上記のポテンシャル(電場に対応する)ではなく、磁場が一様でない系での量子輸送現象が、物理学で理論、実験の両面から注目されているが、その数学的研究は未だ少ないのが現状であり、未知のことが多い分野である。物理学の文献においても、その多くは数値計算によるものである。F. Klopp、中村周(東京大)、中野史彦(学習院大) 研究代表者は Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields, Ann. Henri Poincaré 4 (2003) 1-17 において、スペクトルの下端において、連続スペクトルは現れず、稠密な固有値のみが存在し、対応する固有関数は指数関数的に減衰する(Anderson 局在)ことを数学的に初めて証明した。しかし、示し得たスペクトルの局在領域は、物理学の予想する範囲に比べて小さい。スペクトルの中間領域における連続スペクトルの存在に関しては、物理学においても一致した見解は無いようである。よって数学的な結果は非常に意味のあるものである。

●南部陽一郎は 2000 年に、一様磁場に一点の Aharonov-Bohm 磁場を付けた場合のスペクトルの摂動を、Aharonov-Bohm 効果との関係で論じている。Y.Nambu, The Aharonov-Bohm problem revisited, Nuclear Physics B 579 (2000) 590-616 田村英男(岡山大名誉教授) 伊藤宏(愛媛大、連携研究者)らは、有限個の Aharonov-Bohm 磁場の散乱理論を考察している。そこで、研究代表者は峯拓矢(京都市芸繊維大、連携研究者)と共に、Aharonov-Bohm 磁場を周期的またはランダムに無限個配した場合を考察してきた。

## 2. 研究の目的

正準交換関係、磁場的 Bloch 理論および楕円関数論を使うことにより分かった。Periodic Aharonov-Bohm solenoids in a constant magnetic field, Rev. Math. Phys. 18 No.8 (2006) 1-22. またランダウ準位間に Aharonov-Bohm 効果によるスペクトルが出現し、その状態密度を評価することが出来た。以上を基に、さらに高位のランダウ準位についての相転移現象、および閾値の幾何的な意味付けを双曲空間等の場合との比較において追及していくことが第一の目的(1)(a)である。具体的には、相転移現象の中で最小ランダウ準位のレゾルベント集合の元への転移には「有理数条件」が課されていたが、これは必要であるか(必要でないと予想している)を調べていく。一般にスペクトルの下端に比べ、エネルギーの大きいスペクトルの解析は容易でないが、第二以上のランダウ準位についても精密な相転移現象を示していきたい。また、この作用素には非可換トーラスの自然な作用があり、この視点からの研究、特に Bellissard や Helffer-Sjöstrand らの Harper 作用素(almost Mathieu 作用素)と磁場シュレディンガー作用素のスペクトルに関する研究との関連についても調べていきたい。この観点は離散作用素の研究(2)とも関係し、重要なものと思われる。

●ランダム Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレディンガー作用素のスペクトルの研究を、峯拓矢と進めている。状態密度関数のスペクトルの下端での漸近挙動、所謂 Lifshitz tail と呼ばれる現象を調べている。この現象は Aharonov-Bohm 効果の一つの数学的表現であるといえる。Schrödinger operators with random  $\delta$  magnetic fields (投稿中)。上記論文である Lifshitz tail についての評価を得ることができたが、さらに精密な評価を追及していきたい。また Wegner 評価の証明や Anderson 局在が実現しているか等、より詳しいスペクトルの構造について研究していくことが第二の目的(1)(b)である。

●双曲空間、特に上半平面  $H$  上の Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレディンガー作用素のスペクトルの研究を峯拓矢と進行させている。上半平面においては、一様磁場シュレディンガー作用素(Maass ラプラシアンとも呼ばれる)は、絶対連続スペクトルとその下に磁場の強さに応じて有限個の、多重度無限大の固有状態(Landau 準位)が現れる。これにある第一種 Fuchs 群の作用に関して不変な Aharonov-Bohm 磁場による摂動を加えた時に、スペクトル構造がどのように変化するかを調べている。しかし、任意の第一種 Fuchs 群  $G$  に対して、その作用で不変な Aharonov-Bohm 磁場の存在からして自明ではなく、これ自体がすでに問題である。Landau levels on the hyperbolic plane in the presence of Aharonov-Bohm fields, Journal of Functional Analysis 263 (2012), 1701-1743 上記の論文において、与えられた零点をもつ保型形式の存在を示すことにより、 $SL(2, Z)$  の場合も含め、 $H/G$  の種数が 0 の場合にはこの問題を解決することができた。さらに、固有関数を

保型形式を用いて表現することにより、ランダウ準位の相転移現象が生じ、相転移の閾値に基本領域を貫く磁束の量を通じて負曲率からの影響が表れることを示すことができている。さらに、 $G$  が合同部分群  $\Gamma(0,11)$  の場合(種数は 1)も考察している。この現象は、第一種 Fuchs 群  $G$  に対応するリーマン面の幾何的構造(例えば種数など)に大きく依存しているようである。ユークリッド空間と比較して、磁束が閾値をとる場合の Landau 準位のスペクトルの構造が、まだ解明されていない。絶対連続スペクトルが現れていると予想されるが、これを追及していきたい。また Landau 準位よりも上にある絶対連続スペクトルについては、Aharonov-Bohm 磁場による摂動についての影響はまだ全く分かっていない。これらスペクトルや固有関数の構造について調べていくことが第三の目的(1)(a)である。

●離散シュレディンガー作用素の固有値の研究を連携研究者である小栗栖 修(金沢大)、樋口 雄介(昭和大)と共に推進している。正方格子の場合に離散固有値の個数を評価することができ、結果について論文を執筆中である。連続スペクトルの内部の埋蔵固有値の非存在性が磯崎洋(筑波大)、森岡悠(芝浦工大)により示されている。正方格子の場合、彼らの結果の除外点であるスペクトルの端点における固有値の存在条件が分かりつつある。それらは Fermi 面や状態密度に密接に関係するようである。またレゾナンス(レゾルベントの解析接続の極)の分布に関する研究を進めており、作用素の非自己共役変形によって出現する複素固有値との関係性や、力学的なレゾナンスの特徴付けについても考察を深めていきたい。第四の目的(2)は、これらを一般のグラフ上の作用素についても、その Fermi 面との関係において追及していくことである。

### 3. 研究の方法

第一の目的(1)(a)周期的 Aharonov-Bohm 磁場(以下 AB 磁場と表わす)を持つシュレディンガー作用素のスペクトルの研究に関しては、第一 Landau 準位が絶対連続である場合の一般化固有関数の解析、Landau 準位消滅に関する有理数条件の必要性の検証、また第二以上の Landau 準位の相転移現象の精密化を行う。第二の目的(1)(b)ランダム AB 磁場のスペクトルの研究では、フラックスの閾値におけるスペクトル構造を調べることで、また Lifshitz tail の精密化や Anderson 局在へ向けて Wegner 評価の証明を試みる。第三の目的(1)(a)上半平面上の AB 磁場を持つシュレディンガー作用素に関しては、磁束の閾値におけるスペクトル構造の解明、および絶対連続スペクトルの摂動による影響について研究を進める。次に第四の目的(2)である離散ラプラシアンのパテンシャル摂動による埋蔵固有値と Fermi 面の関係やレゾナンスの分布に関する研究を進める。

### 4. 研究成果

d 次元格子および正則無限ツリー上の有限ポテンシャルをもつ離散シュレディンガー作用素の固有値の個数を明示する公式を 2016 年に Lett.Math.Phys. に掲載された論文「On the number of discrete eigenvalues of a discrete Schroedinger operator with a finitely supported potential」において示した。この公式をさらに拡張し、連続スペクトルの中に埋込まれた固有値、閾値レゾナンスをもつポテンシャルの全体の集合(Persistent 多様体)を決定し、その幾何構造と元の作用素のスペクトルとの相互関係についての研究を進行させている。特にその多様体の特異点と埋込まれた固有値の多重度の関係を得ることができた。その部分的な結果を研究集会「スペクトル・散乱京都今出川シンポジウム」、「Workshop of Analysis in Kagurazaka 2019」で発表した。さらに一般のポテンシャルの場合の閾値レゾナンス関数の特徴づけと連続スペクトル内にある双曲的閾値レゾナンスの存在性、および極限吸収原理の成立についての結果をまとめ、専門雑誌の投稿した。2次元ユークリッド平面状のランダムな Aharonov-Bohm 磁場をもつシュレディンガー作用素の Lifshitz tail に関する結果を 2017 年に Ann. Henri Poincare に掲載された論文「Schroedinger operators with random  $\delta$  magnetic fields」に発表した。さらに Anderson 局在に向けて研究を進行させている。また研究集会「2019 夏の作用素論シンポジウム」、国際研究集会「偏微分方程式姫路研究集会」を主催し、科研費により招待講演者への旅費等の援助を行った。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takuya Mine and Yuji Nomura	4. 巻 18
2. 論文標題 Schroedinger operators with random $\delta$ magnetic fields	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 1349-1369
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-017-0559-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Hayashi, Yusuke Higuchi, Yuji Nomura and Osamu Ogurisu	4. 巻 106
2. 論文標題 On the discrete eigenvalues of a discrete Schroedinger operator with a finitely supported potential	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1465-1478
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-016-0876-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takuya Mine and Yuji Nomura	4. 巻 18
2. 論文標題 Schroedinger operators with random $\delta$ magnetic fields	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 1349-1369
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-017-0559-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Y.Nomura and K.Taira	4. 巻 21
2. 論文標題 Some properties of threshold eigenstates and resonant states of discrete Schrodinger operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 2009-2030
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-020-00912-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散シュレディンガー作用素のconjugate operator について
3. 学会等名 第25回超局所解析と古典解析、静岡県静岡市清水区清水マリンビル
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 Inverse embedded eigenvalue problems I
3. 学会等名 スペクトル・散乱京都今出川シンポジウム、京都市上京区同志社大学（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 Inverse embedded eigenvalue problems II
3. 学会等名 スペクトル・散乱京都今出川シンポジウム、京都市上京区同志社大学（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 Inverse problems for embedded eigenvalues
3. 学会等名 Workshop on Analysis in Kagurazaka 2019、東京都新宿区神楽坂東京理科大学（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散 Schrödinger 作用素の埋蔵固有値と閾値レゾナンスのPersistent多様体について
3. 学会等名 第162回学習院大学スペクトル理論セミナー、東京都豊島区目白学習院大学（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散シュレーディンガー作用素の埋蔵固有値、閾値レゾナンスに関する逆問題について
3. 学会等名 数理解析研究所研究集会「関数不等式の最良定数とその周辺」、京都市左京区京都大学数理解析研究所（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散シュレーディンガー作用素の埋蔵固有値と閾値レゾナンスのPersistent多様体について
3. 学会等名 第24回超局所解析と古典解析、愛知県犬山市犬山国際観光センターフロイデ
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 Lifshitz tail for Schrödinger operators with random Aharonov-Bohm magnetic fields
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations, 兵庫県姫路市イーグレ姫路（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散シュレーディンガー作用素の埋め込まれた固有値について
3. 学会等名 第23回超局所解析と古典解析 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 埋蔵固有値のPersistent多様体について
3. 学会等名 愛媛大学スペクトル・散乱セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 埋め込まれた固有値のPersistent多様体について
3. 学会等名 岡山-広島 解析・確率論セミナー 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散シュレーディンガー作用素の埋蔵固有値と閾値レゾナンスについて
3. 学会等名 2017 鹿児島スペクトル幾何学研究会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 群の作用で不変な磁場摂動による相転移について
3. 学会等名 愛媛大学解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散シュレーディンガー作用素の埋め込まれた固有値について
3. 学会等名 2015夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 ランダムAharonov-Bohm磁場シュレーディンガー作用素のスペクトルについて
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 グラフ上のラプラシアンとスペクトルについて
3. 学会等名 RIMS共同研究「ウェーブレット解析と信号処理」（招待講演）
4. 発表年 2015年



1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 離散群の作用で不変な磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルについて
3. 学会等名 一橋大学 数理科学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 野村 祐司
2. 発表標題 ランダムなAharonov-Bohm磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルについて
3. 学会等名 広島 - 岡山 解析・確率セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----