

令和元年6月21日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04961

研究課題名(和文) 退化型及び特異型ケーラー・シーゲル系の漸近解析と適切性

研究課題名(英文) On the asymptotics and well-posedness for Keller-Segel system of degenerate and singular type

研究代表者

杉山 由恵 (Sugiyama, Yoshie)

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：60308210

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：退化型Keller-Segel系を研究対象とし、時間無限大における漸近解析を行った。より詳細には、Keller-Segel系の非自明な定常解の存在を証明し、更に、時間発展するKeller-Segel系の解の時間無限大でプロファイルが同定常解となる事実を証明した。同研究成果はJose Carrillo氏との共同研究として、2018年にIUMJに掲載されている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

退化楕円型方程式の変分問題を解くことに帰着し、Keller-Segel系の非自明な定常解の存在証明を確立している。同問題の解析には、退化性が誘引する正則性欠如を克服する必要がある。我々は、球対称性を担保することで解のサポートコンパクト性を保証し、解析を容易にする手法を確立している。同手法は多様な退化型方程式系の解析に有効である。

研究成果の概要(英文)：We investigated asymptotic analysis at infinite time with the degenerate Keller-Segel system. More precisely, we proved the existence of nontrivial stationary solutions of the Keller-Segel system, and further proved the fact that the profiles for the Keller-Segel system, which are time-evolving solutions, have the same stationary solution at time infinity. The research results have been published in IUMJ in 2018 as a joint research with Mr. Jose Carrillo.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：退化放物型方程式 Keller-Segel系 漸近解析 非自明定常解

1. 研究開始当初の背景

KS は単細胞生物の密度の時間発展を追跡する数理生物モデルとして 70 年代に提唱された反応拡散型方程式系である。半線形型については、解の時間大域的な存在や有限時刻における爆発が知られており、流体力学における Navier-Stokes 方程式と同様に、今日数理生物学における確固としたモデルと目されている。

半線形型、退化準線形放物型である KS は、空間次元と初期データとの微妙なバランスのもとに、時間大域解と爆発解の存在が顕著に現れる非線形方程式のモデルとして 1980 年代から活発に議論されてきている。

KS は多くのパラメータを有し、その取り方によって半線形型、退化型、特異型が現れる豊富な構造を内在している。特に退化型の場合、主要項の係数に未知関数が含まれるため一様楕円性が保証されない困難を生ずる。同方程式系自身は、放物-放物型および放物-楕円型に分類されるが、ともに重要な研究対象であり、適切性を論じる際、それぞれの特性に応じた解析が求められる。KS で重要な問題は以下に分類される。

1: “時間局所解の存在・一意性” といった “適切性” の説明は、非線形偏微分方程式の研究では共通する極めて重要な問題意識である。

2: 小さい初期条件に対して “時間大域解の存在・一意性・安定性” (これらを初期値問題の “(時間大域的)適切性” という) を論じる。

3: 解が有限時刻爆発するとは、有限時間で解  $u$  の空間変数に関する最大値が無限大に発散すること、即ち、時刻  $T_*$  が存在して  $\limsup_{t \rightarrow T_*} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty$  と定める。このような時刻  $T_*$  の存在や、 $T_*$  における解構造の解明、更に  $T_*$  を超えて方程式のもつ性質を解析しようとする数学的試みを “特異性” 解析と呼ぶ。大きい初期条件に対しては “(時間局所的)適切性” に加え、 “特異性” 解析が重要な研究課題となる。

KS には有限時刻における爆発解の例が知られており、特異性解析は国内外の研究者等によってインテンシブに進められてきた。特に半線形 KS は空間 2 次元では、初期条件の個体質量に関する正確な臨界値 (8) により時間大域解と有限時刻爆発解に切り分けられる。(Nagai-Senba-Yoshida, 1997, [Nagai, 2000].) 実際、初期個体質量を 8 より大きく、かつ初期凝集を十分に大きく選ぶと KS の解が次の性質を有することを証明できる。

- “解の最大値が有限時間で  $+$  に発散する (解の爆発)”;
- “爆発時刻での爆発解の形状は  $\delta$  関数である (特異性)”

2. 研究の目的

線形・非線形拡散型 KS 系の学術背景

	$2 \leq q < m + \frac{2}{n}$	$q = m + \frac{2}{n}$	$q > m + \frac{2}{n}$
初期値：小	時間大域存在	時間大域存在 [Sugiyama, 2006]	
初期値：大	[Sugiyama, 2006]		有限時間爆発 [Sugiyama, 2007]

KS はパラメータ  $m$  を有し、その取り方によって半線形、準線形退化型 ( $m > 1$ )、特異型 ( $0 < m < 1$ ) 拡散方程式といった豊富な構造を内在している。実際、上述の 1, 2, 3 に関する以下の豊かな解構造を有する。

非線形拡散型 KS の初期値問題の適切性及び爆発構造について、従来研究を詳細に述べる。

(i) **解の時間大域的な可解性**: 拡散の影響 (次数  $m$ ) が非線形項 (次数  $q$ ) に比べて大きい  $q < m + 2/n$  ときは、任意の初期値に対して時間大域的弱解が存在することを示した。逆に、非線形性が拡散に比べて強い  $q \geq m + 2/n$  の場合には、時間局所的な弱解と、小さな初期値に対する時間大域的弱解を構成した。(Sugiyama[2006, 2007].)

(ii) **臨界指数**: 有限時刻爆発を証明するには、初期条件として個体質量と慣性モーメント、即ち初期質量の一点における凝縮度を考慮する必要がある。KS の解の有限時刻における爆発に関しては  $q = 2, m > 1, 2 \geq m + 2/n$  の場合に、爆発解が生じる初期値の関数空間を規定している (Sugiyama[2006].)。従って、KS は  $q = m + 2/n$  を臨界値として、解の時間大域的な存在と有限時刻爆発が分類される。

非線形次数が  $q$  である単独 2 階の半線形放物型方程式に関しては、所謂、藤田指数:  $1 + 2/n$  が有名である。すなわち、 $q > 1 + 2/n$  であれば小さな初期値に対して解が時間大域的に存在し、 $1 < q < 1 + 2/n$  であれば、任意の正值解は必ず有限時刻で爆発する。従って同結果は退化型 KS に対する藤田指数の存在を予見させるものである。実際、 $q = m + 2/n$  を臨界値として解の時間大域的な存在と有限時刻爆発が分類可能であることを研究代表者は詳らかにしており、同研究成果は退化準線形放物型方程式の研究分野にお

いて高く評価されている。

加えて、研究代表者は以下の特異性を証明している。

(iii). **爆発時刻での爆発点の集合**：有限個の点からなり、爆発点の個数は、初期値のサイズに依存して決定される (Sugiyama[2009,2010])。

(iv). **爆発時刻での爆発解の形状**： $q = 2, m > 1, 2 \geq m + 2/n$  の時、集中項の影響により、大きい初期値をもつ解は、有限時刻でその最大値が無限大に発散する点を有する(爆発する)。更に、爆発の様相として、臨界指数では一点に質量が集中する関数の形状を有することを  $\varepsilon$ -正則性定理を確立することにより検証した。(Sugiyama[2009,2010])。より詳細には以下を証明している。

(爆発解の漸近挙動) 爆発点の集合を  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  とする。このとき、正定数  $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ ,  $f \in L^1(\square^n)$  かつ  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = T$  なる時間の列  $\{t_j\}_{j=1}^\infty$  が存在して、
$$u(\cdot, t_j) \rightarrow \sum_{i=1}^k M_i \delta_{x_i}(\cdot) + f(\cdot), \quad j \rightarrow \infty$$
 が超関数の意味で成り立つ。

上記の(ii),(iii),(iv)により、爆発時刻  $T_*$  における爆発解の漸近挙動は詳らかにされている。更なる数学解析を行うには、以下が核心的な問いとなる。

爆発時刻を超えて解を構成するか。そのための適切な解空間は存在するか；  
爆発点(関数の凝集の中心)の軌跡は時間関数として正則かどうか；  
爆発点の凝集サイズは時間関数として正則であり、かつ単調性を有するか。

本研究では、退化型及び特異型をした放物-楕円型 Keller-Segel 方程式系に焦点を絞り、退化性の欠如が引き起こす同系特有の解構造を詳らかにすることを研究目的とした。

3. 研究の方法 項目4.の成果を得るためには、関数解析的手法に基づいている。具体的には、変分法を用いた上で、minimizing sequence を構成し、同 sequence の minimizer として定常解が特徴づけられることを証明した。

4. 研究成果 本研究では、退化型及び特異型をした放物-放物型 Keller-Segel 方程式系に焦点を絞り、非自明な定常解の存在と、同解が時間発展型 Keller-Segel 系の時間無限大におけるプロフィールであることを証明した。同成果は、2018年 IUMJ に掲載されている。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

(査読有) J. A. Carrillo and Y. Sugiyama, Compactly supported stationary states of the degenerate Keller-Segel system in the diffusion-dominated regime, Indiana University Mathematics Journal, 67, 2279-2312, 2018.

(査読有) H. Kozono, M. Miura and Y. Sugiyama, Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid, J. Funct. Anal., 270, 1663-1683, 2016.

(査読有) T. Kawakami and Y. Sugiyama, Uniqueness theorem on weak solutions to the Keller-Segel system of degenerate and singular types, J. Differential Equations, 260, 4683-4716, 2016.

(査読有) Y. Sugiyama, Partial regularity and blow-up asymptotics of weak solutions to degenerate parabolic system of porous medium type, Manuscripta Math., 147, 311-363, 2015.

[学会発表](計 24 件)

Y. Sugiyama, On the  $\varepsilon$ -regularity theorem for the Keller-Segel systems and its application to the analysis of singular sets", 京都大学 NLPDE セミナー(日本、京都)", 2019/1/25

Y. Sugiyama, Measure valued solutions of 2D Keller-Segel systems, The 16th Linear and Nonlinear Waves(日本、滋賀), 2018/10/31

Y. Sugiyama, Measure valued solutions of 2D Keller-Segel systems, 反応拡散方程式 - 伝播現象と特異性の解析および諸科学への応用 - 京都大学数理解析研究所研究集会, October 26, 2018.

Y. Sugiyama, Measure valued solutions of 2D Keller-Segel systems, 第16回 Linear and Nonlinear Waves, October 31, 2018.

- Y. Sugiyama, Compactly supported stationary states of the degenerate Keller-Segel system in the diffusion-dominated regime, 2018 年度偏微分方程式 集中セミナープログラム (日本、兵庫), 2018/8/7
- Y. Sugiyama, On the Structure of Solutions of Keller-Segel Systems with Sinks of Fluid, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS10 (台湾、台北), 2018/7/8
- Y. Sugiyama, Compactly supported stationary states of the degenerate Keller-Segel system in the diffusion-dominated regime, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS11 (台湾、台北), 2018/7/7
- Y. Sugiyama, 退化型 Keller-Segel 系の解構造について, 大阪大学数学科談話会(日本、大阪), May 28, 2018.
- Y. Sugiyama, On the structure of solutions of Keller-Segel systems with fluid and its application to life science, 大阪大学数学教室 微分方程式セミナー (於 大阪大学), May 11, 2018.
- Y. Sugiyama, Compactly supported stationary states of the degenerate Keller-Segel system in the diffusion-dominated regime, 第 42 回 南大阪応用数学セミナー (於 大阪府立大学), April 28, 2018.
- E. Espejo and Y. Sugiyama, On the structure of solutions of Keller-Segel systems with sinks of fluid, The 3rd International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis, 2018 年 2 月 23 日
- H. Kozono, M. Miura, Eduardo Espejo and Y. Sugiyama, On the structure of solutions of Keller-Segel systems with sinks of fluid, 第 8 回 拡散と移流の数理, 2017 年 9 月 5 日.
- H. Kozono, M. Miura and Y. Sugiyama, Global existence and finite time blow-up criterion of solutions to the Keller-Segel systems coupled with the Navier-Stokes fluid, KWMS International Conference, 2017 年 6 月 23 日.
- H. Kozono, M. Miura and Y. Sugiyama, Global existence and finite time blow-up criterion of solutions to the Keller-Segel systems coupled with the Navier-Stokes fluid, Tianfu International Conference on PDEs, 2017 年 6 月 17 日.
- Y. Sugiyama, Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid, 日本数学会, 2017 年 3 月 27 日.
- Y. Sugiyama, On Hölder continuity of solutions to fast diffusion equations with external forces and its applications, 東京理科大学, 2017 年 2 月 24 日.
- Y. Sugiyama, Global existence and finite time blow-up criterion of solutions to the Keller-Segel systems coupled with the Navier-Stokes fluid, Waseda University, 2016 年 11 月 11 日.
- Y. Sugiyama, Global existence and finite time blow-up criterion of solutions to the Keller-Segel systems coupled with the Navier-Stokes fluid, East China Normal University, 2016 年 11 月 13 日.
- Y. Sugiyama, Global existence and finite time blow-up criterion of solutions to the Keller-Segel systems coupled with the Navier-Stokes fluid, Institute Mittag-Leffler, 2016 年 9 月 15 日.
- Y. Sugiyama, Global existence and finite time blow-up criterion of solutions to the Keller-Segel systems coupled with the Navier-Stokes fluid, Banach Center, 2016 年 9 月 6 日.
- 21 Y. Sugiyama, Time global existence and finite time blow-up criterion for solutions to the Keller-Segel system coupled with Navier-Stokes fluid, International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis, 東京理科大学, 2016 年 2 月 23 日.
- 22 Y. Sugiyama, Time global existence and finite time blow-up criterion for solutions to the Keller-Segel system coupled with Navier-Stokes fluid, 北陸応用数理研究会 2016, 金沢大学, 2016 年 2 月 18 日.
- 23 Y. Sugiyama, Mathematical Modeling and Analysis of Chemotactic Cell Migration, 生命動態システム科学拠点セミナー, 京都大学, 2015 年 11 月 6 日.
- 24 Y. Sugiyama, Global existence and finite time blow-up of solutions to the Keller-Segel systems coupled with the Navier-Stokes fluid, 月曜解析セミナー, 東北大学, 2015 年 5 月 11 日.

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。