様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４９６２

研究課題名（和文）p調和写像流の単調性評価と正則性特異性の研究

研究課題名（英文）Monotonicity estimates and local regularity and singularity for the p-harmonic flows

研究代表者

三沢　正史（Masashi, Misawa）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・教授

研究者番号：４０２４２６７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：p調和写像流は，二つの滑らかなコンパクト多様体間の写像のpエネルギーの臨界点であるp調和写像に対する勾配流であり退化特異放物型方程式系で記述される．主要な結果は以下である:p>2の場合に，pエネルギー有界なp調和写像流の正則解に対して一様に正則性評価が成り立つための条件を空間局所スケールエネルギーの有界性によって与えた．この定理をもとに，pエネルギー有界なp調和写像流の正則解の族の弱コンパクト性，解の族の弱収束極限写像はp調和写像流の弱解であり部分的に正則であることを証明し，正則性に関する除外点(特異点)の集合のサイズはほとんど最良の次元のHausdorff測度によって評価した．

研究成果の概要（英文）：The p-harmonic flow is the heat flow for the p-harmonic maps,the critical points for p-energy for maps beteween two smooth compact Riemannian manifolds, and given by the degenerate and singular parabolic system of 2nd ordered partial differential equations of so-called p-Laplcian type. We study the regularity and singularity of solutions of the p-harmonic flows. Our main result is the local regularity theorem, which holds true uniformly for the p-energy bounded, regular solutions of the p-harmonic flows. Based on this local regularity theorem, we prove that the weak limits of p-energy bounded, regular p-harmonic flows are partial regular weak solutions of the p-harmonic flows, with the almost optimal size estimation by Hausdorff measure, of their singular sets, the exceptional sets of regularity.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：偏微分方程式　退化特異放物型方程式系　正則性特異性　調和写像　調和写像熱流　p調和写像　p調和写像熱流

１．研究開始当初の背景

(1) 調和写像は，Dirichlet エネルギーの臨界関数であり，調和関数の多様体への一般化である．p 調和写像は，Dirichlet エネルギーを一般化した p エネルギーの臨界関数であり，p 調和関数の多様体版である．p 調和写像方程式は，写像先の多様体 N のベクトル束 T(N) 上の p 調和方程式であり，とくに，N(⊂R^l, l≥2, の等距離埋め込み)の第 2 基本量(一階導関数に関して p 乗増大度の非線形量)をもつ非線形退化特異楕円型 2 階偏微分方程式系であるので，一般に滑らかな(連続微分可能な)解をもつとは限らない．p 調和写像の存在，正則性に関する基本的な結果は以下である．

・Dirichlet 境界値問題の p エネルギーの最小化関数の存在(p-Dirichlet 原理)．
・p エネルギー最小化関数は部分的に連続微分可能である(R. Hardt, F. H. Lin, M. Giaquinta, S. Luckhaus, M. Fuchs らによる 1980 年代後半の結果)．
・p が定義域の次元 m と一致する(p = m)の場合には，m エネルギーの最小化関数は連続微分可能であり，さらに，写像先の多様体のある対称性の仮定のもと，m 調和写像の弱解(m エネルギー有限な超関数の意味の解)は連続微分可能となる(F. Duzaar, M. Fuchs, L. Mou, P. Yang, P. Strzelecki, C. Wang らの 1990 年代の結果)．

(2) 未解決問題　しかしながら，p 調和写像の一般の弱解の存在およびその正則性については，未解決のままである．そこで，本研究では，p 調和写像の一般の弱解の存在とその正則性を調べるために，次の問題を研究する:
p 調和写像流の大域存在，正則性と特異性：p エネルギーの勾配流，p 調和写像流，の弱解の時間大域的存在、および弱解が正則(連続，連続微分可能)であるための条件(正則性条件)とその正則性条件の成り立たない点(特異点)の集合のサイズ(Hausdorff 測度)の評価

p 調和写像流は，p エネルギーの最急降下曲線であるので，その解の時間無限大の極限関数は定常解，p 調和写像，となることが予想される．とくに，任意の初期値から出発する p 調和写像流は，エネルギー最小化関数以外の p 調和写像に収束することが期待される．これが，J. Eells と J. H. Sampson が最初に p=2 の場合に，調和写像流を考えた所以であった(Eells-Sampson の方法)．p=2 の場合，調和写像流の弱解は時間大域的に存在して，(部分的)に滑らかである(M. Struwe, K.-C. Chang, Y. Chen, F. H. Lin らの 1980 年後半の結果)．また，滑らかでない点，特異点，の集合の(Hausdorff 測度の)大きさは，幾何学的な意味で最良に評価できる．とくに，空間 2 次元(p=m=2)の場合には，特異点集合は有限個に限る．申請者は，15 年来，これら調和写像流に関する基本的結果を p 調和写像流に一般化しようと研究してきたが，今だ解決には至っていない．

２．研究の目的

(1) 本研究では，以下の問題を研究する．

① **大きいデータに対する弱解の大域存在**：p エネルギー有限な初期値(境界値)に対する p 調和写像流の時間大域的な弱解の構成

② **p 調和写像流の最良正則性条件と特異性**： p 調和写像流の p エネルギー有界な滑らかな(連続微分可能な)解に対して一様な正則性評価が成り立つための局所積分条件の証明．この積分条件は解の適当なスケール変換に関連する p エネルギー(スケールエネルギー)によって与える．また，正則性条件の成り立たない点(特異点)の集合のサイズ(Hausdorff 測度)を計算する．

(2) **本研究の方針**　本研究では，幾何学的に自然なスケールエネルギーの単調性評価を証明する：
スケール p エネルギーの単調性評価：
時間発展 p 調和作用素を不変にする幾何学的に自然なスケール変換に関する，スケール p エネルギーは，スケール変数の単調非減少関数である．スケールエネルギーの単調性評価は，スケールエネルギーがある点で集中するか否かを判定する公式であり，とくに，p 調和写像流の滑らかな解に対して一様に正則性評価が成り立つための条件を与える．これにもとづいて②の問題を研究する：p エネルギー有界な滑らかな解に対する一様正則性評価のための条件を幾何学的に自然なスケールエネルギーで与える．
ここで言う正則性条件とは，p エネルギー有界な滑らかな解に対する先験的評価が成り立つための条件を意味し，したがって，p エネルギー空間で弱収束する滑らかな解の列のコンパクト性条件と成り得る．すなわち，弱収束する滑らかな解の列の極限関数は，p エネルギー有限な弱解であり，さらに，この正則性条件のもと滑らかであることが期待できる．この事実にもとづいて①の問題を研究する：p 調和写像流の適当な近似方程式に対して，上の正則性条件を適用して，近似解の極限関数が p 調和写像流の弱解であることを証明する．p=2 の場合，調和写像流に対しては，適当な近似方程式が知られている(Y. Chen, M. Struwe の結果，penalty 法とよぶ一種の特異摂動法)．この近似方法を適当に修正して p 調和写像流に適用する．
上の正則性条件は，滑らかな解の列の弱収束極限である p 調和写像流の弱解の正則性条件ともなる．正則性条件はスケールエネルギーの有界性によって与えられるので，この正

則性条件の成り立たない点(特異点)の集合のサイズを見積もることが期待できる：

大きいデータに対する弱解の特異性 上で求めた，p 調和写像流の弱解の滑らかでない点(特異点)の集合のサイズ(Hausdorff 測度)を求める．有限時間で不連続性を発生する p 調和写像流の解が存在する(C.-N. Chen, L. F. Cheng, Y. S. Choi, C. K. Law の 2002 年の結果)ので，p 調和写像流の正則性条件を考察することは自然である．

(3) **学術的特色，意義** 解の正則性と特異性の研究は，幾何学，物理における非線形偏微分方程式の弱解の正則性問題において自然に出現する．コンパクト多様体上の定スカラー曲率をもつリーマン距離の存在(山辺問題)の R. Schoen による解決は，リーマン距離の等角(共形)変換の存在に関する熱流の方法(Yamabe 流)の正則性特異性解析によって別証明された(R. Hamilton の提案，R. Ye, B. Chow, M. Struwe, S. Brendle らの結果)．R. Hamilton, G. Pelerman は，Poincaré 予想の解決のために，Ricci 曲率流の正則性特異性の解析を行った(2007 年度フィールズ賞)．このような状況のもとで， p調和写像流の弱解の正則性の研究は，解決すべき研究課題であり，また，他の幾何学的，物理的に重要な非線形偏微分方程式の正則性特異性の研究と相互に関連して，今後の進展が大いに期待できる．

３．研究の方法

(1) 本研究計画では，

① 大きいデータに対する p 調和写像流の**弱解の時間大域存在**

② pエネルギー有界な滑らかなp調和写像流に対する(先験的)**正則性条件**．また，正則性条件の成り立たない点(**特異点**)**の集合のサイズ評価**．

の二つの問題の解決を目指す．このために以下の手順で研究する：

a．ある**スケール p エネルギー**がスケール変数の**単調非減少関数**であること(**単調性評価**)の証明

b．単調性評価による，滑らかな p 調和写像流に対する先験的な正則性条件の証明

c．近似方程式(penalty 方程式)の導入と a, b の単調性評価，正則性条件の近似方程式への適用

(2) p 調和写像流の p エネルギー有界な滑らかな解に対して，あるスケール p エネルギーの単調性評価を証明する．このスケールは，時間発展 p 調和作用素を不変に保つスケール変換で定まり，とくに，作用素の非同次性によって，解の大きさに依存して選ぶ必要がある．このようなスケール変換は．すでに，DiBenedetto によって提案されていた(1989-1990 の結果)．積分評価を実行する時空局所領域(時間，空間変数の領域)のサイズと解の大きさ，この 2 つのスケール変数をどのように選ぶかが問題である．ここでは，J. Lewis と J. Kinnunen の方法(2002 年の結果)を発展させて利用する．p 調和写像流方程式に付随する適当な 2 変数のスケール変換を選び，それに関するスケール p エネルギーを定める．このとき，

a-1．(単調性評価の構成) スケール p エネルギーがスケール変数の単調非減少関数であることを証明する．幾何学的に自然なスケールエネルギーが望ましいが，まずは，適当な 2 つのスケール変数に関して，スケールエネルギーの単調性を計算する．一方，このスケールエネルギーは正則性条件を与えるものでなければならない．

b-1．(正則性条件の構築) スケール p エネルギーがある閾値より小さいならば，p エネルギー有界な滑らかな解に対して一様な正則性評価が成り立つ
ことを証明する．申請者は， 時間発展 p 調和方程式系に対して，幾何学的に自然なスケールエネルギーの有界性のもと，小さい弱解のヘルダー連続性を証明した．この結果を踏まえて **a-1，b-1** の問題を考察する．次いで，p 調和写像流の適当な近似方程式に対して，**a-1, b-1** の単調性評価，正則性条件を適用して，近似解に対する一様な正則性評価を構成し，近似解のコンパクト性を証明する．調和写像流に対して導入された特異摂動法による近似(Y. Chen, M. Struwe の 1980 年代後半の結果)を改良して，p 調和写像流に対して適用する．これにより

c-1．(p調和写像流の大域存在，正則性特異性) 大きいデータに対する p 調和写像流の大域存在
を証明する．正則性条件を与えるスケールエネルギーによって，p 調和写像流の正則性の成り立たない点(特異点)の集合のサイズ(Hausdorff 測度)を計算する．

(3) **a，b** の問題，スケール p エネルギーがスケール変数の単調非減少関数である，とそれによる，p エネルギー有界な滑らかな p 調和写像流に対する一様な正則性評価の条件，について，最初のステップとして，**a-1, b-1** において，単調性評価と正則性条件の成り立つ，適当な 2 つのスケール変数に関するスケールエネルギーを導入するのだが，次いで，幾何学的に自然なスケールエネルギーの単調性を証明し，それによって最良の正則性条件を与えることが目標である．

a-2．(最良の単調性評価) 幾何学的に自然なスケールエネルギーが単調非減少である
ことを証明し，それにもとづいて，

b-2．(最良の正則性条件の構築) 最良のス

ケールpエネルギーがある閾値より小さいならば，p エネルギー有界な滑らかな解に対して一様な正則性評価が成り立つことを証明する．ここでいう幾何学的に自然なスケールエネルギーとは，p=2 の場合調和写像流に対して構築されたスケールエネルギー(M. Struwe の 1980 年代の結果)のある意味で自然な一般化であるものを意味する．申請者は，p 調和写像流の小さい像の弱解が連続微分可能であるための正則性条件を，幾何学的に自然なスケールエネルギーの有界おえた(研究業績 1)．これはとくに p=2 の場合調和写像流に対する古典的結果(M. Giaquinta, M. Struwe による 1980 年前半の結果)を含み，その証明方法は正則性理論におけるいわゆる直接的方法であった．これに対して，最近，正則性理論における間接的方法(blowing up の方法)が，p 調和作用素に対して最良の形で証明された(F. Duzaar, G. Mingione, T. Kuusi らの 2010 年前後の結果)．これら正則性評価の方法はいずれも，DiBenedetto による，時間発展 p 調和作用素を不変にする特有のスケール変換のもと局所積分評価を構成することにもとづいている．これら証明における，積分評価を実行する時空局所領域のサイズと解の大きさの 2 つのスケール変数の選び方を参考に，最良のスケールエネルギーの単調性とそれによる最良の正則性条件を研究する．**c-1** において，ある特異摂動法にもとづく p 調和写像流の近似方程式を導入するのだが，**a-2**，**b-2** において得られる最良の単調性評価と最良の正則性条件を近似方程式に適用して近似解に対する一様な正則性評価を構築する．

これにより

c-2.（p 調和写像流の部分的正則な弱解の時間大域存在）p 調和写像流の部分的正則(ある特異集合を除いて連続微分可能)な弱解の時間大域存在を証明できると期待している．ある初期値境界値に対しては，有限時間で不連続性を発生する p 調和写像流の解が存在する(C.-N. Chen, L. F. Cheng, Y. S. Choi, C. K. Law の 2002 年の結果)ので，特異点(滑らかでない点)集合をもつ弱解の存在を考えることは自然である．一方，正則性条件を与え，単調性評価の成り立つスケールエネルギーのスケールオーダーによって，特異点集合のサイズ(Hausdorff 測度)が評価される．この観点からも最良のスケールエネルギーを考える必要がある．

(4) **役割分担**　**a**，**b**，**c** の問題を解決するために，以下のように役割分担して研究を進める．

1. 代表者の三沢は，主に p 調和写像流の正則性条件の研究に携わる．関連する国内外の偏微分
方程式，実解析，関数解析関係の研究集会，セミナーに参加し，必要な情報を収集し，それらにもとづいて，定期的に代表者所属大学でセミナーを開いて，連携研究者，関連研究者と研究打ち合わせを行う．

2. 連携研究者の山浦は，p 調和写像流の弱解を構成するために，弱収束の方法(P. L. Lions の concentration-compactness の方法)の改良精密化について研究する．

４．研究成果

(1) p>2 の場合に，p エネルギー有界な p 調和写像流の正則解(解およびその空間一階階導関数が時空連続である解)に対して一様に正則性評価が成り立つための条件を空間局所スケールエネルギーの有界性によって与えた(局所正則性定理)（「主な発表論文等」中②）．

(2) p>2 の場合に，p エネルギー有界な p 調和写像流の正則解の族の弱コンパクト性，この解の族の弱収束極限写像は p 調和写像流の弱解であり，部分的に正則である．正則性に関する除外点(特異点)の集合のサイズはほとんど最良の次元の Hausdorff 測度によって評価できる
(「主な発表論文等」中②)

(3) p>2 の場合に，(1)の局所正則性定理によって，p エネルギーの小さい初期値に対する p 調和写像流の正則解の時間大域存在の別証明を与えた（「主な発表論文等」中①）．

(4) p>2 の場合に，滑らかなコンパクト多様体上の p 調和写像流に対する初期値問題の弱解の大域存在とその弱解の部分的正則性を証明した．さらに，弱解の特異点集合のサイズをほとんど最良次元の Hausdorff 測度にて評価した (preprint)．

(5) p 調和写像に関連する退化特異エネルギー汎関数の極小化関数である symphonic 写像のとくに球面に値をとる熱流に対する初期値境界値問題の弱解の大域存在を証明した(「主な発表論文等」中③)．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Regularity for the evolution of p-harmonic maps, M. Misawa,
J. Differential Equations
264 (2018), 716-1749, 査読あり,
https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.006

② Local regularity and compactness for the p-harmonic map flows, M. Misawa, Adv.

Calc Var. (2017), published on line, 査読あり, DOI: 10.1515/acv-2016-0064

③ Global existence for the heat flow of symphonic maps into spheres, M. Misawa, N. Nakauchi, Adv. Differential Equations (2017), 査読あり,
accepted for publication

④ Gradient Hölder regularity for nonlinear parabolic systems
of p-Laplacian type, C. Karim, M. Misawa, Differential Integral Equations 29 (2016), no. 3-4, 201-228, 査読あり

⑤ A Hölder regularity of symphonic maps into spheres, M. Misawa, N. Nakauchi, Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), no. 1, Art. 16, 20 pp. 査読あり

⑥ Hölder regularity for singular parabolic systems for p-Laplacian type, C. Karim, M. Misawa, Adv. Differential Equations 20 (2015), no. 7-8, 741-772, 査読あり, http://www.aftabi.com

〔学会発表〕（計 13 件）

① A doubly nonlinear degenerate and singular
parabolic equation and a geometric flow, M. Misawa, Workshop, Critical exponent and nonlinear evolution equations 2018,
M. Misawa, Tokyo University of Science, 2018/2/16-17 (招待講演)

② Monotonicity estimate and global existence for the p-harmonic flows,
M. Misawa, 「関数空間の深化とその周辺」, RIMS Conference, 2018/2/5-8
(招待講演)

③ Global existence and partial regularity for the p-harmonic flow, M. Misawa,
Free Boundary Problem and Nonlinear PDEs, Hokkaido University, 2017/9/26-28
(招待講演)

④ Regularity theory for degenerate and singular parabolic systems and its application to geometric flows,
M. Misawa, Functional Analysis and Partial Differential Equations, 2017
CIMPA-MONGOLIA research school,
Centre International de Mathmatiques Pures et Appliques,
Khovd University, Mongolia, 2017/7/17-28
(招待講演)

⑤ 時間発展 p 調和作用素に対する局所正則性とその応用, 三沢正史, 「関数空間の構造とその周辺」, RIMS Conference, 2017/2/6-8
(招待講演)

⑥ Local regularity theorem for the evolution of p-harmonic maps, M. Misawa, 「Nonlinear PDEｓ」-Aspects of Regularity and Asymptotics」, Korea-Japan Int. Workshops, Toya Sun Palace, 2016/11/17-19
(招待講演)

⑦ ｐ調和写像熱流の単調性評価と局所正則性定理, 三沢 正史, 研究集会「第 12 回 非線形の諸問題」, かんぽの宿 湯田, 2016/9/11-13 (招待講演)

⑧ p 調和写像熱流に対する単調性評価と正則性, 三沢正史,「微分方程式セミナー」, 大阪大学数学教室, 2016/5/20, (招待講演)

⑨ Local regularity criterion for the p-harmonic map heat flows, M. Misawa,
「PDE Workshop at Sendai」, Kawai Hall, Tohoku University, 2016/5/26-28, (招待講演)

⑩ Monotonicity type estimate and regularity criterion for p-harmonic map heat flows, M. Misawa, Variational Problem and Nonlinear Partial Differential Equations, Tokyo University of Science at Noda, 2016/3/24-25 (招待講演)

⑪ On a degenerate type variational problem and its heat flow, M. Misawa, 2015 NIMS Hot Topics Workshop on Regularity Theory on Elliptic and Parabolic Equations, Sangsan Mathematical Science Building, Seoul National University, Seoul, Korea, 2015/12/9-12 (招待講演)

⑫ ある幾何学に現れる退化型変分問題とその熱流について, 三沢正史, 南大阪応用数学セミナー, 大阪市立大学数学教室, 2015/11/28 (招待講演)

⑬ On a degenerate elliptic system and its heat flow, Nonlinear PDE Workshop at Tohoku University, M. Misawa, Kawai Hall, Faculty of Science, Tohoku University, 2016/9/24-26 (招待講演)

６．研究組織

(1)研究代表者

三沢 正史（MISAWA, Masashi）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40242672

(2)連携研究者

山浦 義彦（YAMAURA, Yoshihiko）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号： 90255597