

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04994

研究課題名(和文) 逆凸制約を持つ2次計画問題に対するKKT点列挙法を用いた大域的最適化手法の開発

研究課題名(英文) A global optimization method for a reverse convex programming problem by listing FJ points

研究代表者

山田 修司 (YAMADA, SYUJI)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：80331544

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、2つの凸集合で表される制約集合をもつ逆凸2次計画問題(QRC)に対する大域的最適化法の開発を目的とした。多くの大域的最適化問題が逆凸計画問題に変換できることが知られている。多くの研究者によって(QRC)の大域的最適解の近似解を求めるための反復解法が提案されている。本研究では、提案手法よりも効率的に(QRC)の近似解を求めるために、KKT点列挙法を開発した。この手法により、制約集合を与えている2つの凸集合の境界の共通部分に大域的最適解へ収束する暫定解列を生成することが可能になった。また、分枝限定法を導入し、(QRC)に対する大域的最適化法の計算速度を向上させることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、逆凸2次計画問題に対し、KKT点列挙法を独自に開発し、従来法では近似解を求めることができなかった高次元問題に対しても精度の高い近似解を求めることができるアルゴリズムの開発に成功した。したがって、本研究は大域的最適化の視点から非常に独創的であり、学術的に高い意味を持つものと考えられる。また、多くの数理計画問題が本研究対象問題に変換できるため、本研究の成果は数理計画法の分野で幅広く活用されるものと予想できる。さらに、本研究成果は、経営工学、ポートフォリオ選択問題、システム制御、都市計画、施設配置、輸送問題等に活用できるため、幅広い分野に貢献できるものと期待できる。

研究成果の概要(英文)：In this study, we propose a global optimization method for a reverse convex quadratic programming problem (QRC) whose feasible set is expressed as the area excluded the interior of a convex set from another convex set. It is known that many global optimization problems can be transformed into such a problem. Iterative solution methods for solving (QRC) have been proposed by many researchers. In order to find an approximate solution of a globally optimal solution of (QRC), we introduce a procedure for listing KKT points of (QRC). By utilizing such a procedure, we can calculate all KKT points contained in the intersection of the boundaries of convex sets defining the feasible set. Further, we propose an algorithm for finding a globally optimal solution of (QRC) by incorporating such a procedure into a branch and bound procedure.

研究分野：数理計画

キーワード：大域的最適化 KKT条件 逆凸計画問題 2次計画問題

1. 研究開始当初の背景

逆凸制約を持つ線形関数最小化問題は、図 1 のように局所的な最小解（解の近傍と実行可能領域の共通部分上での最小解）が大域的な最小解（実行可能領域全体の最小解）であるとは限らない数理計画問題であり、大域的な最小解を求めることが困難な問題の一つとされている。

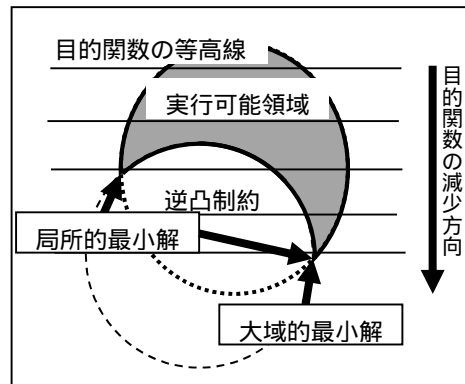


図 1: 逆凸制約を持つ線形関数最小化問題

また、多くの数理計画問題（凹計画、整数計画、双線形計画、分数計画、相補性問題等）がこのような問題に変換できることから、数理計画の分野において、逆凸制約を持つ数理計画問題に対する解法の研究は重要課題の一つであると考えられている。さらに、実社会においては、生産輸送問題や電力輸送ネットワークシステムの運用費用最小化問題等が高次の逆凸制約を持つ数理計画問題として表わされることが知られている。

本研究が対象とする問題に対し、凸多面体逐次近似を用いたアルゴリズムが Tuy 研究グループや本研究グループによって、DC 計画問題に対する局所的な最小解探索法 DCA に基づくアルゴリズムが Dien 研究グループによって提案されていた。

しかしながら、これらの手法は、反復回数に依存してアルゴリズムの実行に必要なデータ量が増加する、または求めた近似解に対してその目的関数値と大域的な最小値の差を評価できないという問題点を抱えているため、変数の数が大きい場合には求めた近似解の精度を保証できないことが知られていた。このため、高次の問題に対しても精度の高い近似解を求めることができるアルゴリズムの開発が必要とされていた。

2. 研究の目的

本研究は、逆凸制約を持つ高次の（変数の数が大きい）2 次計画問題に対して、精度の高い近似解を求めることができる大域的な最適化アルゴリズムの開発を目的とした。従来、逆凸制約を持つ数理計画問題に対しては、凸多面体近似法や強力な局所的な最小解探索法である DCA を導入した反復解法が提案されている。しかしながら、これらの手法は、反復回数に依存してアルゴリズムの実行に必要なデータ量が増加する、または求めた近似解に対してその目的関数値と大域的な最小値の差を評価できないという問題点を抱えているため、変数の数が大きい場合には求めた近似解の精度を保証できないことが知られている。このため、本研究は、KKT 点列挙法を導入することでこれらの問題点を克服し、変数の数が 200 以上の問題に対しても大域的な最小値と許容誤差内の目的関数値を持つ実行可能解を求める反復解法の開発を目指した。

本研究グループはこれらの手法と異なる次のアルゴリズムを提案していた。

(ア) KKT 点列挙法に基づく大域的な最適化アルゴリズム

(イ) 固有値近似計算法の導入による KKT 点列挙法の高速度化

(ア) の手法は、数理計画の分野で良く知られた最適性条件である Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を満足する実行可能解を列挙することで、対象問題の大域的な最小解の近似解を求めている。

このため、(ア) の手法では、ラグランジュ乗数に対する分枝限定法を導入し、反復毎に更新されるラグランジュ乗数と KKT 条件から得られる対称行列のすべての固有値を求めることで、実行可能な KKT 点を列挙し、大域的な最小解の近似解を求めている。(イ) は (ア) の手法で用いていた固有値計算法を固有値の近似値を計算する手法に入れ換えることで、アルゴリズムの高速度化を図っている。この研究成果により、従来の凸多面体逐次近似に基づくアルゴリズムでは次元が 40 以下の場合にのみ有効な近似解を求めることができなかったが、(ア) と (イ) の手法では、次元の数が 100 以上でも有効な近似解を求めることが可能になった。しかしながら、(ア) と (イ) の手法では、近似解の精度を保証するために、ラグランジュ乗数に対する分枝限定法を

複数回実行している。このため、制約関数の数が大きくなると計算速度が極端に遅くなってしまふという問題点を抱えている。そこで、本研究では、(ア)と(イ)の研究を基に、次数が200以上かつ制約関数の数が50以上でも精度の高い近似解を求めることができる高速なアルゴリズムの構築を目的とした。

3. 研究の方法

本研究は、先行研究(基盤研究(C)課題番号24540118)の成果を基に、田中環教授(新潟大学)と谷野哲三教授(大阪大学)と連携し、逆凸制約を持つ2次計画問題に対する大域的最適化アルゴリズムの開発に取り組む。その成果を利用し、多目的計画問題の有効解集合上での最適化問題や分数計画問題に対するアルゴリズム、さらにデータ包絡線分析法におけるクロス集計効率値計算法の開発を行った。従来法と提案アルゴリズムの比較するため、複数の大学院生と協力して計算機実験を行った。各段階で得られた研究成果は、国際会議等でその都度発表し、様々な研究者と意見交換を行い、アルゴリズムの修正方針を決定した。研究期間は4年とし、次のように研究を行った。

平成27年度の計画

KKT点列挙法に関する研究

- 次の文献を元に、DCAに関する資料収集を行った。
T.P.Dinh, H.A.L.Thi, Recent Advances in DC Programming and DCA, Transactions on Computational Intelligence XIII Lecture Notes in Computer Science, Volume 8342, 1-37, 2014
- 「数理計画に関する国際シンポジウム」(2015年7月,アメリカ)に参加し、資料収集を行った。
- 上記で収集した資料を基、高次元問題にも有効なKKT点列挙法を開発した。

平成28年度の計画

KKT点列挙法に関する研究

- 平成27年度に開発したアルゴリズムの有効性を計算機実験で確かめた。

固有値の近似値計算法の精度向上

- 次の文献を元に、固有値計算法に関する資料収集を行った。
Numerical Methods in Matrix Computations (Texts in Applied Mathematics), Springer, 2014
- 「多目的意思決定に関する国際会議」(2015年8月,ドイツ)に参加し、資料収集を行った。
- 上記で収集した資料を基に、KKT点列挙法の反復毎に生成される対称行列の固有値近似計算法の精度向上を図った。

平成29年度の計画

固有値の近似値計算法の精度向上

- 平成28年度に開発したアルゴリズムの有効性を計算機実験で確かめた。

多目的計画問題の有効解集合上での最適化問題

- 「KKT点列挙法」、「固有値の近似値計算法の精度向上」の研究成果を基に、「多目的計画問題の有効解集合上での最適化問題」に対するアルゴリズムの開発を行った。

- 計算機実験により開発したアルゴリズムの有効性を確認した。

平成 30 年度の計画

分数計画問題に対する大域的最適化

- 「KKT 点列挙法」、「固有値の近似値計算法の精度向上」の研究成果を基に、「分数計画問題」に対する大域的最適化アルゴリズムの開発を行った。
- 計算機実験により開発したアルゴリズムの有効性を確認した。

データ包絡線分析法におけるクロス集計効率値計算法の開発

- 「KKT 点列挙法」、「固有値の近似値計算法の精度向上」の研究成果を基に、「データ包絡線分析法におけるクロス集計効率値計算」に関するアルゴリズムの開発を行った。
- 計算機実験により開発したアルゴリズムの有効性を確認した。

4. 研究成果

本研究では、次の成果を得ることができた。

- 正定値対称行列で定義された複数の逆凸制約を持つ問題は、変数を 1 つ増やすことで、ヘッセ行列の正定値対称性を保持したまま逆凸制約が一つだけの数理計画問題に変換できることを明らかにした。
- 凸制約のラグランジュ乗数を固定した場合、逆凸制約のラグランジュ乗数が凸制約のヘッセ行列を与えられたラグランジュ乗数で加重和した行列の固有値と異なるような KKT 点は高々次元数の 2 倍しかないことを明らかにした。
- 凸制約のラグランジュ乗数を固定した場合、逆凸制約のラグランジュ乗数が凸制約のヘッセ行列を与えられたラグランジュ乗数で加重和した行列の固有値と同じになる KKT 点が存在するための必要十分条件を明らかにした。
- 凸制約のラグランジュ乗数ベクトルを単体上に制限できることを明らかにした。
- 本研究が対象とする逆凸計画問題に対し、目的関数として与えられている線形関数で定義される部分空間と逆凸制約を与える関数のレベル集合の境界との共通部分上で凸制約関数を最小化する問題に対し、分枝限定法とパラメトリック最適化手法を導入し、KKT 点を列挙する手法の開発に成功した。
- 凸制約関数と逆凸制約関数のリブシツ連続性を用いて、パラメトリック最適化法のパラメーター更新方法を開発に成功した。
- 凸制約のラグランジュ乗数ベクトルを更新するための分枝限定法に対し、目的関数値が許容誤差内に収まる凸制約ラグランジュ乗数ベクトルの近傍半径の計算方法の開発に成功した。これにより、提案手法は利用者が決定する許容誤差内に大域的最適値と目的関数の差が収まる近似解を求めることが可能になった。
- 凸制約に対するラグランジュ乗数を更新するたびにヘッセ行列を加重和した行列の固有値、固有ベクトルを求めるが、その固有値、固有ベクトルの有効な近似計算法を開発した。このため、提案手法の計算速度を向上させることに成功した。
- 凸制約に対するラグランジュ乗数を更新するたびにヘッセ行列を加重和した行列の固有値、固有ベクトルを計算するが、その計算に必要なデータの削減法を開発した。これにより、提案手法は従来法より大規模な問題に対しても実行可能であり、その有効性能を計算機実験で検証した。その結果、従来法では高々変数の数が 40 個までの問題にしか大域的最適解の近似解を計算することができなかったが、変数の数が 180 個以上の問題に対しても大域的最適値と目的関数値の差が許容誤差内に収まる近似解を求めることが可能になった。
- 逆凸制約を持つ多目的計画問題の有効解集合上での最適化問題を一般の有効解集合上での最適化問題と本研究対象の逆凸計画問題に分割できることを明らかにした。このため、有効解集合上での最適化問題に対する従来法と本研究で開発した逆凸計画問題に対する KKT 点列挙法を組み合わせることで、逆凸制約を持つ多目的計画問題の有効解集合上での最適化問題に対する大域的最適化アルゴリズムの開発に成功した。
- 凸集合上で凸関数の比の加重和で表される目的関数を最小化する分数計画問題は、逆凸制約を一つだけ持つ最適化問題に変換できることを明らかにした。これにより、本研究で開発した KKT 点列挙法を応用し、凸集合上で凸関数の比の加重和で表される目的関数を最小化する分数計画問題に対する大域的最適化アルゴリズムの開発に成功した。

- 従来のデータ包絡線分析法では、各 DMU の評価値を優先して重みベクトルを決定し、その重みにより、各 DMU の改善指標を与えていた。しかしながら、DMU によっては評価値より順位を優先することが考えられる。このため、本研究の成果を応用し、DMU の順位を優先した重みベクトルの計算方法と改善指標を提案することに成功した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 件)

Yuto Ogata, Yutaka Saito, Tamaki Tanaka, Syuuji Yamada, Sublinear Scalarization Methods for Sets with Respect to Set-Relations, Linear and Nonlinear Analysis, pp.121-132, 2017

山田修司, 逆凸計画問題に対する大域的最適化とその応用, システム制御情報学会誌 60(2), pp.47-53, 2016

Y. SAITO, T. TANAKA, S. YAMADA, On Generalization of Ricceri's Theorem for Fan-Takahashi Minimax Inequality into Set-Valued Maps via Scalarization, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol.16, pp.9-19, 2015

〔学会発表〕(計 17 件)

Syuuji Yamada, Algorithm for calculating a gradual improvement target and its applications in DEA, 非線形解析学と最適化に関する第 6 回アジア会議, 沖縄科学技術大学院大学(沖縄), 2018 年 11 月 4 日 - 8 日

Syuuji Yamada, A procedure for listing FJ points of a quadratic reverse convex programming problem, 2018 年計測制御に関する国際会議, 奈良春日野国際フォーラム(奈良), 2018 年 9 月 11 日 - 15 日

(招待講演) S.Yamada, A Global Optimization Method for a Quadratic Reverse Convex Programming Problem by Listing FJ Points, International Workshop on Big Data Analysis and Intelligent Healthcare, 高雄医学大学(高雄, 台湾), 2018 年 8 月 2 日

Syuuji Yamada, A global optimization method for a quadratic reverse convex programming problem by listing FJ points, 30th European Conference on Operational Research, バレンシア(スペイン), 2018 年 7 月 6 日-14 日

山田修司, 凸乗法計画問題に対する KKT 点列挙法, 第 612 回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都テルサ(京都), 2018 年 5 月 15 日 - 17 日

山田修司, 凸関数の積の大域的最小化, 第 60 回自動制御連合講演会, 電気通信大学(東京), 2017 年 11 月 10 日-12 日

(招待講演) S.Yamada, A Global Optimization Method for a Quadratic Reverse Convex Programming Problem by Listing FJ Points, The Research Conference and 2017 Annual Convention of the MSP-Regions 10, 12 & ARMM, タグビラン会議場(タグビラン, フィリピン), 2017 年 10 月 24 - 26 日

Syuuji Yamada, Improvements of an updating method of Lagrange multipliers in the procedure of listing FJ points for a reverse convex, quadratic programming problem, 21st Conference of International Federation of Operational Research Societies, ハンブルグ(ドイツ), 2017 年 7 月 17 日 - 21 日

山田修司, 逆凸 2 次計画問題に対する FJ 点列挙法におけるラグランジュ乗数更新方法の改善, 第 61 回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都テルサ(京都), 2017 年 5 月 23 日 - 25 日

山田修司, 逆凸 2 次計画問題に対する FJ 点列挙法を導入した分枝限定法の改善, 日本オペ

レーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会, 沖縄県市町村自治会館 (沖縄県・那覇市), 2017 年 3 月 15 日 - 17 日

山田修司, 逆凸 2 次計画問題に対する FJ 点列挙法の改善, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年秋季研究発表会, 山形大学 (山形), 2016 年 9 月 14 日 - 16 日

S.Yamada, Algorithm for calculating a gradual improvement target and its applications in DEA, The 19th Czech Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty, 松本大学 (長野県・松本市), 2016 年 9 月 5 日 - 7 日

S.Yamada, Optimality conditions and a branch-and-bound procedure for a cone-dc vector optimization problem, The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 朱鷺メッセ (新潟), 2016 年 8 月 1 日 - 6 日

S.Yamada, A procedure for listing FJ points of a quadratic reverse convex programming problem, 28th European Conference on Operational Research, ポツナン (ポーランド), 2016 年 7 月 3 - 6 日

(招待講演) 山田修司, 逆凸 2 次計画問題に対する FJ 点列挙法を用いた大域的最適化手法, 第 60 回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都テルサ (京都府京都市), 2016 年 5 月 25 - 27 日

S.Yamada, Optimization over the Efficient Set of a Multiple Objective Linear Programming Problem with Reverse Convex Constraint, 23rd International Conference on Multiple Criteria Decision Making, ハンブルグ(ドイツ), 2015 年 8 月 2 - 7 日

S.Yamada, A Global Optimization Method for a Quadratic Reverse Convex Programming Problem by Listing FJ Points, The 22nd International Symposium on Mathematical Programming, ピッツバーグ (アメリカ), 2015 年 7 月 12 - 17 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名: 田中環

ローマ字氏名: TANAKA, tamaki

所属研究機関名: 新潟大学

部局名: 自然科学系

職名: 教授

研究者番号 (8 桁): 10207110

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: 谷野哲三

ローマ字氏名: TANINO, tetsuzo

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。