

令和 2 年 9 月 15 日現在

機関番号：13401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04997

研究課題名(和文)一般化指数型分布に関わる数理・現象・計算技術の情報幾何学による研究

研究課題名(英文) Deformation and flatness of information geometric structure and their applications

研究代表者

小原 敦美 (Ohara, Atsumi)

福井大学・学術研究院工学系部門・教授

研究者番号：90221168

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：A1. 共形平坦化と呼ばれる手法による数理解析：べき型分布の場合に著者らの研究により知られていた「共形平坦化により現れる情報幾何的な平坦性」をより一般的な非指数型分布の場合へ拡張し整備した。

A2. 非指数型分布に対応する確率単体や正定値対称行列錐の情報幾何と応用：非指数型離散確率モデルを扱う計算技術の開発は、それらのパラメータ空間である確率単体や正定値対称行列上に定義される平坦な情報幾何構造を利用したアルゴリズム構築となる。この考えにもとづき一般化ロバストな母数推定、数理最適化、パターン分類などの新しい計算手法の開発・拡張を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の意義は、計画に沿った成果をあげることで関連する多くの学問分野に新しい知見と刺激を与える波及効果を及ぼすことに加えて、前述したような高い社会的要請にも対処できるデータ解析手法を提示するという実用面への貢献もあげることができる。

研究成果の概要(英文)：A1. Mathematical analysis by conformal flattening technique in information geometry: conformal flattening technique which transform non-flat statistical manifolds to dually flat ones is derived and its properties are investigated. The non-flat manifolds can be regarded as a generalized exponential family.

A2. Application of information geometry on probability simplex and a cone of positive definite symmetric matrices corresponding to generalized exponential family: Computational algorithms dealing with generalized exponential densities are performed on their parameter spaces. Using dually flat geometry defined on these spaces, we developed the algorithms such as robust parameter estimation, mathematical optimization, and pattern classification.

研究分野：情報幾何

キーワード：非指数型確率分布 情報幾何学 統計多様体 共形平坦化 対称錐 非線形拡散現象

## 1. 研究開始当初の背景

多数の個体やデータが関与する様々な現象を解析する統計科学、情報理論、統計力学などの分野では、「指数型分布」と「ボルツマン-シャノンエントロピー」を基礎とした枠組みが理論的に大きな成功を収めてきた。そこではデータ発生源である個体は、時空間的に近接したもの同士以外は互いにあまり影響されずにほぼ独立に振る舞い、データは無作為に抽出されるという仮定が本質的であった。

しかし今日、人間社会で取得と蓄積が可能となってきた多様で大量のデータは必ずしもこのような仮定が満たされず、その統計解析のため非指数型の確率分布のロバストな母数推定手法の充実が今も期待されている(H. Fujisawa, S. Eguchi: Journal of Multivariate Analysis, 99(9), 2053-2089 (2008). E. Ollila, D.E. Tyler, V. Koivunen, H.V. Poor: IEEE Trans. signal process. 60(11), 5597-5623 (2012)など)。

一方、物理でも個体間に長距離・長時間の相互作用が働く系では平衡分布としてしばしば「べき関数の分布」が現れる。そのような系の振る舞いを調べ理解するために、べき型分布を最大エントロピー分布とするような一般化エントロピーが提案され、現象論的説明を与えるとともにその興味深い数理構造がしだいに明らかになりつつあった(C. Tsallis: Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Springer (2009). J. Naudts. Generalized Thermostatistics, Springer (2011)など)。

これらの異分野に派生した問題意識や研究動機を共通の枠組みで捉え、現象や問題の根本を明らかにする理論と計算技術・アルゴリズムを構築しようという機運が急速に形成され、大偏差原理や独立性などの確率論的な基礎事項にも影響を及ぼす可能性が出てきていた。

## 2. 研究の目的

データ解析の社会的要請と複雑系研究の物理への注目から、非指数(一般化指数)型分布に関連する理論研究、計算技術の充実が必要となってきた。この領域の背景にある数理構造は、申請者らによる一連の研究により情報幾何学と深く関わっていることが明らかになり、これを用いることで数多くの研究結果が導かれてきた。

本研究では、これらの結果をより進展させるため、基本概念と考えられる幾何的変形操作(共形平坦化)を用いた一般化指数型分布の数理解析を第一の目的とする。また、このクラスの分布で最重要な一般化ガウス分布の幾何構造を正定値対称行列集合上に誘導できることを利用し、一般化ガウス分布を扱う計算手法を正定値対称行列の集合上で構築することを第二の目的とする。

## 3. 研究の方法

本研究は、連携研究者や他らの協力を得ながらも基本的には代表者が単独で進めた。

理論的な研究である成果 A1 については、主に学会や研究会での議論情報交換を通して、代表者が着想を膨らませて理論構築するとともに、物理現象への応用では、指導する学生の数値実験結果及び彼らとの議論を通して主結果を導いた。

A2 に関しては連携研究者に加えて、いくつかの研究との関連を見いだすことで多くの研究者との共同研究も実施することで成果をえた。

研究結果は、学会や研究会で発表し、学術誌論文あるいは学術書の一部として出版することで公表した。

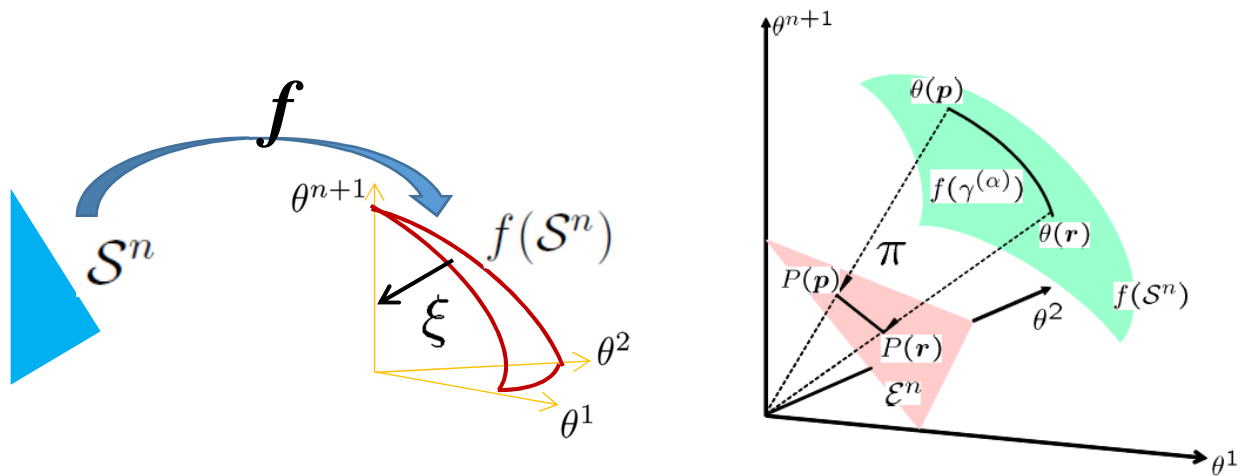
## 4. 研究成果

### A1.(共形平坦化)

また、アファイン微分幾何と呼ばれる手法に基づき、確率単体上の様々な情報幾何構造(これらはアファイン埋め込みに依存する)を共形平坦化して得られる双対平坦構造を明らかにした。この結果は、リプリケータ方程式と呼ばれる確率単体上の勾配流や情報幾何構造から定まる測地流と関係があるので、それらに対して成立するいくつかの結果を導き、応用の可能性を示した[5]。

また、確率単体上の様々な情報幾何構造(アファイン埋め込みに依存する)を共形平坦化して得られる双対平坦構造を定めるポテンシャル関数や双対座標の公式を導出し、その幾何構造に対して自然な振る舞いをもつ力学系を導出した[8]。

この際現れる共形ダイバージェンスを利用して、今年度は確率単体上の多数の点(確率)に対し、幾何的ダイバージェンスに関する重心の計算公式を導出した[9]。多数のデータ(確率)の重心は、例えばパターンマッチングで重要な働きをするので、機械学習などの分野で応用の可能性がある。



図：確率単体のアフィン埋め込み（左）と共形平坦化（右）のイメージ

#### A1（二重自己平行）

情報幾何学では，リーマン計量について互いに双対的なアフィン接続のペアという概念が様々に重要な働きを見せる．この二つのアフィン接続のどちらに対しても自己平行な部分多様体上の情報幾何構造を考えることができる．この「二重自己平行性」と呼ばれる性質を備えた部分多様体は，その特別な性質ゆえに情報幾何のいくつかの応用で重要な働きをする．

研究成果として，まず対象錐と呼ばれる数学的对象に対して，その部分多様体が二重自己平行となる必要十分条件を求めた[9]．

次に情報幾何の応用上最も重要な確率分布モデルの代表例である確率単体の部分多様体に対して代数的に特徴付けを用いて必要十分条件を求めた．結果として，その代数の部分代数が二重自己平行な部分多様体に対応することが明らかになったが，この事実を利用して，さらにそのような部分代数の分類を与えた．これにより，与えられた部分多様体が二重自己平行かどうかを判定できるようになっただけでなく，逆に望ましい二重自己平行部分多様体を構成するための重要な指針が与えられたことになる[7]．

#### A1 物理現象への応用

一方，拡散現象は確率分布の時間発展と捉えることができる．過去の研究で，複雑系に特有な異常拡散という現象を示す多孔媒質拡散方程式の解の振る舞い  $q$ -ガウス分布との詳細な関係を情報幾何によって明らかにした．近年，インターネット上の情報拡散，生態ネットワーク，疫病の拡散，機械学習のアルゴリズムなど空間離散的な拡散現象に興味もたれている．グラフ上のラプラシアンを用いたべき型非線形性を有する拡散方程式が，興味深い同期現象を引き起こすことを数値実験により発見し，そのメカニズムと  $q$ -指数関数が重要な働きをすることを明らかにした[11]．このようなネットワーク上の非線形拡散現象の振る舞いに関する知見は，上述したような応用における人工ネットワークの設計に知見を与えるものと期待できる．

#### A2（統計への応用）

一般化指数分布のうち，通常の指数型分布のよい性質のいくつかを持ち，応用上にもしばしば現れる分布として  $q$ -ガウス分布がある． $q$ -ガウス分布上の情報幾何構造を定める ダイバージェンスに対し， $q$ -ガウス分布をパラメトライズする正定値対称行列空間の情報幾何構造を定める  $V$  ポテンシャルの対応関係を導き， $q$ -ガウス分布上の情報幾何構造が一般には  $SL(n)$ -群不変性，特別な条件をつけると  $GL(n)$ -不変性を持つことを示した[2]．

また確率密度関数の集合上で定義される  $U$ -ダイバージェンスと呼ばれる擬距離を用い，モーメント制約の下で得られる最大エントロピー分布が一般化指数型分布となることを示し，これらにまつわる双対平坦構造を定めた[1]．また確率密度関数の様々な平均と幾何構造の関係を明らかにした[6]．

#### A2（情報科学への応用）

正定値対称行列を特別な場合として含む対象錐に対する情報幾何について基本的な性質をまとめ，特に正定値対称行列を中心にこれらの性質に基づいて得られる興味深い結果として，ガウシャングラフィカルモデリング，半正定値計画内点法の計算の手間と曲率に関する応用研究を解説する記事を出版した[4]．

関連する研究として，正定値対称行列上の最適化計算技術の一つの根幹となる半正定値計画法及びそのシステム制御への応用をまとめた成書を刊行した[3]．

## 引用文献

- [1] Shinto Eguchi, Osamu Komori and Atsumi Ohara,  
Duality in a maximum generalized entropy model,  
*Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering (MaxEnt2014)* (Ali Mohammad-Djafari and Frederic Barbaresco eds.) AIP proceedings, vol.1641, 297-304 (2015).
- [2] 小原 敦美, 江口 真透,  
V ポテンシャルから導かれる正定値対称行列空間の幾何とその応用,  
*数理解析研究所講究録 1953*, 69-87 京都大学数理解析研究所 (2015).
- [3] 小原 敦美  
行列不等式アプローチによる制御系設計,  
(システム制御工学シリーズ), コロナ社 (2016)
- [4] 小原 敦美, 土谷 隆  
正定値行列の情報幾何 (1), (2), (3),  
岩波データサイエンス Vol. 2, 3, 4 岩波書店 (2016)
- [5] Atsumi Ohara,  
On affine immersions of probability simplex and their conformal flattening,  
*Geometric Science of Information* (Frank Nielsen and Frederic Barbaresco eds.)  
Springer Lecture Notes in Computer Science Vol. 10589, Springer, 247-254 (2017).
- [6] Shinto Eguchi, Osamu Komori and Atsumi Ohara,  
Information geometry associated with generalized means,  
*Information geometry and its applications (IGAIA IV, Liblice, Czech Republic, 2016)*  
(Nihat Ay et al. eds.) 279-295, Springer, (2018).
- [7] Atsumi Ohara and Hideyuki Ishi,  
Doubly autoparallel structure on the probability simplex,  
*Information geometry and its applications (IGAIA IV, Liblice, Czech Republic, 2016)*  
(Nihat Ay et al. eds.) 323-334, Springer, (2018).
- [8] Atsumi Ohara,  
Conformal Flattening for Deformed Information Geometries on the Probability Simplex,  
*Entropy*, Vol.20, No.3, 186 (13pp.) (2018).
- [9] Atsumi Ohara,

Doubly autoparallel structure on positive definite matrices and its applications,  
*Geometric Science of Information* (Frank Nielsen and Frederic Barbaresco eds.),  
Springer Lecture Notes in Computer Science Vol. 11712, Springer, 251-260 (2019).

[10] Atsumi Ohara,

Conformal Flattening on the Probability Simplex and Its Applications to Voronoi  
Partitions and Centroids,

*Geometric Structure of Information* (Frank Nielsen eds.), Chapter 4 (pp.51-68),  
Springer (2019).

[11] Xiaoyan Zhang, Taiga Senyo, Hiroto Sakai and Atsumi Ohara,

Behaviors of solutions to network diffusion equation with power-nonlinearity - A role  
of the q-exponential function for sufficiently large power-exponent - ,

*Eur. Phys. J. Special Topics*, Vol.229, 729-741 (2020).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Atsumi Ohara   | 4. 巻<br>20            |
| 2. 論文標題<br>Conformal Flattening for Deformed Information Geometries on the Probability Simplex | 5. 発行年<br>2018年       |
| 3. 雑誌名<br>Entropy  | 6. 最初と最後の頁<br>186-198 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.3390/e20030186  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-             |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Xiaoyan Zhang, Taiga Senyo, Hiroto Sakai and Atsumi Ohara  | 4. 巻<br>229           |
| 2. 論文標題<br>Behaviors of solutions to network diffusion equation with power-nonlinearity - A role of the q-exponential function for sufficiently large power-exponent - | 5. 発行年<br>2020年       |
| 3. 雑誌名<br>Eur. Phys. J. Special Topics   | 6. 最初と最後の頁<br>729-741 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1140/epjst/e2020-900202-5   | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-             |

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 7件）

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Atsumi Ohara  |
| 2. 発表標題<br>An affine differential geometric aspect of doubly autoparallelism       |
| 3. 学会等名<br>Information Geometry and Affine Differential Geometry III (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Atsumi Ohara   |
| 2. 発表標題<br>Doubly autoparallelism on the space of probability distributions |
| 3. 学会等名<br>International conference of statistical physics 2017 (国際学会)      |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Atsumi Ohara  |
| 2. 発表標題<br>On affine immersions of probability simplex and their conformal flattening      |
| 3. 学会等名<br>The third international conference Geometric Science of Information 2017 (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2017年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Atsumi Ohara  |
| 2. 発表標題<br>Behavioral Analysis of Certain Nonlinear Diffusion Equations via Information Geometry |
| 3. 学会等名<br>The Ninth International Conference on Guided Self-Organisation GS02018 (招待講演) (国際学会)  |
| 4. 発表年<br>2018年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Atsumi Ohara  |
| 2. 発表標題<br>Doubly Autoparallel Structure on Statistical Manifolds and its Applications |
| 3. 学会等名<br>Information Geometry and its Applications IV (国際学会)                         |
| 4. 発表年<br>2016年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Atsumi Ohara   |
| 2. 発表標題<br>Doubly Autoparallelism on Symmetric Cones and its Applications |
| 3. 学会等名<br>Workshop "Development of Matrix Analysis" (国際学会)               |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|                             |
|-----------------------------|
| 1. 発表者名<br>伊師, 小原           |
| 2. 発表標題<br>ヘッセ領域上の群不変ポテンシャル |
| 3. 学会等名<br>日本数学会            |
| 4. 発表年<br>2017年             |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Atsumi Ohara   |
| 2. 発表標題<br>Information geometry on multivariate generalized Gaussian densities and its group invariance |
| 3. 学会等名<br>Computational information geometry for image and signal processing (招待講演) (国際学会)             |
| 4. 発表年<br>2015年   |

〔図書〕 計1件

|                             |                 |
|-----------------------------|-----------------|
| 1. 著者名<br>小原 敦美             | 4. 発行年<br>2016年 |
| 2. 出版社<br>コロナ社              | 5. 総ページ数<br>251 |
| 3. 書名<br>行列不等式アプローチによる制御系設計 |                 |

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|                           |                       |    |