

令和元年6月6日現在

機関番号：32661

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K05007

研究課題名(和文) 不動点理論の手法を用いた完備測地距離空間上の凸解析学の研究

研究課題名(英文) Convex analysis on complete geodesic spaces using the techniques of fixed point theory

研究代表者

木村 泰紀 (KIMURA, Yasunori)

東邦大学・理学部・教授

研究者番号：20313447

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題は、種々の関数空間で研究されている凸解析の理論を、完備測地距離空間において展開することを目指す。とくに、空間上で定義された凸関数に対し、リゾルベントと呼ばれる作用素を定義し、その作用素に不動点理論の諸結果を適用することで、凸最小化問題をはじめとするさまざまな非線形問題の解近似法が得られた。

リゾルベントの定義で用いる摂動関数を工夫することで、空間の曲率にあわせて良好な性質をもつリゾルベントが得られた。これによって多くの不動点理論の結果を適用することが可能となり、さらに、リゾルベントのもつ新たな性質から不動点近似に対する新たな知見も得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

関数空間を舞台として研究されてきた従来の凸解析学はバナッハ空間における不動点理論と両輪をなし、互いに影響しあいながら発展を遂げてきた。その一方で、今世紀初頭から研究が精力的に行われている測地距離空間における不動点理論と比較して、測地距離空間上の凸解析学の研究は発展が望まれている分野であった。本研究課題はその要望にこたえるものとしての学術的意義がある。

また、この研究によって、測地距離空間上で定義される種々の非線形問題の解法に関する知見が得られている。非線形問題は現実社会における問題を数理的視点で定式化したものであり、これらの問題の解法が解明されることは社会的に大きな意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：This study aims to develop the theory of convex analysis in the setting of complete geodesic spaces, which has been traditionally studied in function spaces. In particular, we define a resolvent operator for a convex function on a geodesic space, and by applying fixed point theory to this operator, we obtain approximation results for various types of nonlinear problems including convex minimization.

By choosing appropriate perturbation functions, we obtained resolvents having suitable properties for the curvature of the space. This technique enables us to apply a number of results in fixed point theory to the resolvent operators, and moreover, we succeeded to find new results about fixed point approximation by the new properties of our operators.

研究分野：非線形解析学

キーワード：測地距離空間 凸解析学 不動点理論 リゾルベント

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形解析学の研究分野の中で、最適化理論等と密接な関わりを持つ凸解析の研究は、主にバナッハ空間上の汎関数を研究対象として発展を遂げてきた。バナッハ空間は、より豊富な性質を備えるヒルベルト空間の一般化として捉えることができるが、ヒルベルト空間のもう一つの一般化として CAT() 空間がある。これは測地距離空間の一種であり、アダマール多様体等の幾何学的な特徴をもつ空間を含む概念である。この空間における凸解析の研究はバナッハ空間上の凸解析学と比較すると、統一的な理論も提案されておらず、未だ発展途上の段階であった。

(2) 一方、凸解析学と関連の深い研究分野である不動点理論は、2004年に Kirk によって証明された CAT(0)空間上の非拡大写像の不動点定理や、2009年の Espínola-Fernández-León による Kirk の定理の CAT(1)空間への拡張が端緒となり様々なタイプの不動点定理や不動点近似列の研究が進められてきた。

(3) 2010年代以降は、CAT(1)空間上の不動点理論および不動点近似理論も盛んに研究されるようになった。バナッハ空間とは幾何学的性質が大きく異なるため、研究には大きな困難もあるが、本研究を開始するにあたって、測地距離空間上での凸解析学の研究に大きな進展があることが期待された。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ヒルベルト空間やバナッハ空間などの関数空間において研究がなされている凸解析の各種理論を、完備 CAT()空間上において展開することである。今世紀初頭から目覚ましい発展を遂げている完備 CAT(1)空間における不動点理論および不動点近似理論の手法を応用することで、従来の手法とは異なる新しい側面からの研究の発展を目指す。さらに、幾何学的な視点も積極的に取り入れ、本研究分野の多方面への発展を目指す。

(1) リゾルベント作用素の性質究明

CAT(1)空間のリゾルベントをより深く研究し、空間上の作用素としての性質を究明する。これにより、現在盛んに研究が進められている不動点理論から、凸解析の諸問題へのアプローチが可能となり、CAT(1)空間上の非線形問題に多くの近似理論が適用できることが期待できる。

(2) リゾルベントを用いた非線形問題の解法研究

CAT(1)空間で定義された各種の非線形問題に対し、リゾルベントを利用した解法を提案し、その収束性等の解明を目指す。バナッハ空間における各種の非線形問題については、近接点法等の近似解法においてリゾルベントが重要な役割を果たすことから、CAT(1)空間におけるリゾルベントについても、この空間でも同様の理論展開が可能であると考えられる。

(3) 空間の幾何学的構造と写像の関係究明

リゾルベントを含むさまざまな写像の性質は、空間の幾何学的構造との関連が深いことが知られている。本研究によって写像の性質をより深く研究することにより、空間全体の幾何学的性質との関連を導き出すことを試みる。

(4) 測地距離空間上の凸解析学の構築

空間の幾何学的構造を踏まえて、バナッハ空間で定義されている凸解析の諸概念を CAT(1)空間を含む一般の CAT()空間で再定義し、CAT()空間上での凸解析学の構築を目指す。

3. 研究の方法

本研究課題の研究方法は、研究対象をその抽象度によって3つの段階に分割し、それぞれの研究を関連づけながら進めていく手法を取った。

(1) リゾルベントの性質の研究

測地距離空間上の凸解析学と不動点理論との架け橋となるリゾルベントの性質についての研究を行った。主に作用素としての抽象的な性質に焦点を絞り、不動点の存在やその近似、空間が持つ性質との関係等について研究を進めた。同時に完備 CAT(1)空間の幾何学的性質の研究も進めていった。

(2) 不動点理論の凸解析学への適用

リゾルベントの他にも周辺の概念を構築することにより、不動点理論の様々な成果を CAT(1)

空間上の凸解析の諸問題へ適用し、新しい成果を得ることを目指した。とくに、バナッハ空間上の凸解析学における具体的な非線形問題を CAT(1) 空間上の問題に翻訳および再設定し、解の存在や近似解法の提案をした。

(3) 測地距離空間上の凸解析学の構築

本研究課題で得られた成果を集約し、CAT(1) 空間上の凸解析学として再構築した。さらに一般的な曲率上限をもつ測地距離空間である CAT(κ) 空間上の凸解析学の構築も目指した。

4. 研究成果

(1) 曲率上限に依存したリゾルベント作用素の定義

関数空間上の凸関数に対して定義されていた従来のリゾルベント作用素をもとに、完備測地距離空間上の凸関数に対するリゾルベントの定義を提案し、その定義の妥当性と基本的性質を調査した。曲率上限が 0 の空間においては、従来の定義から容易に導かれる形でリゾルベント作用素を定義することができるが、正または負の曲率上限をもつ空間において妥当と思われるものを発見するのは容易ではない。本研究課題では、曲率上限が 1 の空間においては摂動関数として $\tan t \sin t$ を用いることで、良好な性質をもつリゾルベントを定義できることを発見した。

さらに、この摂動関数を、曲率上限をパラメタとする無限級数で表示することにより、曲率上限が負の測地距離空間においても、曲率に応じた良好な性質をもつリゾルベントとして定義可能であることを証明した。この知見は、リゾルベント作用素に関連する理論を曲率に関して包括的に扱う際に重要な役割を果たすものであり、測地距離空間上の凸解析学の理論構築に大きく貢献できるものである。

(2) 新たなリゾルベント作用素

一方、まったく別の摂動関数を用いることで、作用素としての性質が異なるリゾルベントを定義することにも成功している。この新しいタイプのリゾルベントは、とくに曲率上限が正のときの性質が従来のものと大きく異なるが、曲率の符号に依存しない形で不等式で表現する際には非常に美しい形となっているのが特徴である。こちらのタイプについては、曲率上限が負のときは一般的な凸関数に対して定義できないこと等、研究の余地がまだ残されてはいるものの、今後の凸解析学の発展に新たな方向を見出せる可能性を秘めていると考えられる。

(3) 近接点法による解近似

上記の 2 種類のリゾルベント作用素を、凸関数の最小化問題の解近似手法として知られる近接点法に適用し、解への収束定理を得た。凸関数の最小化問題は抽象度の高い問題であり、多くの非線形問題に応用することが可能である。その点において、この結果が凸解析学の応用分野に与えるインパクトは大きいと思われる。

さらに、不動点近似理論を応用することによって、Mann 型や Halpern 型と呼ばれる近似点列の生成法に対してもリゾルベント作用素が適用可能であり、近接点法と同様に凸最小化問題の解近似法として利用可能であることがわかった。また、収縮射影法と呼ばれる近似点列生成法については、近似の誤差評価について他の近似点列よりも有用な性質をもつことを示した。これらはいずれも、実際の問題への応用の場面で有効な発見であると考えられる。

(4) 写像の性質と不動点定理

リゾルベント作用素の研究によってあらわれる、作用素の新たな性質を整理していくと、これらの作用素が関数空間、とくにヒルベルト空間におけるリゾルベント作用素がもつ性質の一般化になっていることがわかる。このことから、新たな性質をもつ作用素について、作用素の不動点をもつ性質の解明が有効であることが容易に想像できる。本研究においても不動点の性質を中心とした新たな作用素の基本的性質の解明をおこなってきた。具体的な成果としては、nonspreading と呼ばれる写像の性質を曲率に応じて適切に定義し、リゾルベント作用素がこれらの性質をもつことや、nonspreading 写像に対する不動点の存在定理を示すことができた。

(5) CAT(κ) 空間への拡張

完備測地距離空間上のリゾルベント作用素や、さまざまな性質をもつ写像に対する研究は、当初、曲率上限が 0 のものを中心に研究が進み、その後、曲率上限が 1 の空間に対して一般化がなされてきた。さらに近年は曲率上限が -1 の空間に対しても有用な知見が得られ、曲率上限をパラメタとして、これらの理論を統一する動きが見られる。本研究課題ではいち早くこの問題に取り組み、曲率上限をパラメタとするリゾルベント作用素の定義に成功している。まだ多くの問題が残されているが、本研究の成果をきっかけに今後さまざまな問題が解明されていくことが期待される。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 15 件)

Y. Kimura and F. Kohsaka, Two modified proximal point algorithms in geodesic spaces with curvature bounded above, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series II* 68 (2019), 83--104. (査読有)

T. Hasegawa and Y. Kimura, Convergence to a fixed point of balanced mapping by the Mann algorithm in a Hadamard space, *Linear and Nonlinear Analysis* 4 (2018), 405--412. (査読有)

Y. Kimura and K. Satô, The existence of nonexpansive extension on a geodesic space with constant curvature, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 18 (2017), 123--136. (査読有)

Y. Kimura and F. Kohsaka, The proximal point algorithm in geodesic spaces with curvature bounded above, *Linear and Nonlinear Analysis*, 3 (2017), 133--148. (査読有)

Y. Kimura and H. Wada, Iterative methods for nonexpansive mappings on Hadamard spaces and their coefficient conditions, *Linear and Nonlinear Analysis* 2 (2016), 253--261. (査読有)

S. Huang and Y. Kimura, A projection method for approximating fixed points of quasicontractive mappings in Hadamard spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2016:36 (2016), 13 pages. <https://doi.org/10.1186/s13663-016-0523-6> (査読有)

[学会発表](計 19 件)

Y. Kimura, Convex minimization problems on complete geodesic spaces, The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia2018), ANA Intercontinental Manza Beach Resort and Okinawa Institute of Science and Technology Graduate University, Okinawa, Japan, November 7, 2018.

Y. Kimura, Resolvents on complete geodesic spaces and iterative schemes, The 10th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimizations (ACFPT02018), The Empress Hotel, Chiang Mai, Thailand, July 17, 2018.

Y. Kimura, Resolvents for convex functions defined on geodesic spaces and its applications, International Workshop on Nonlinear Analysis and its Applications, Granada University, Granada, Spain, July 9, 2018.

Y. Kimura, Convex minimization problems and resolvents on geodesic spaces, 2017 Symposium on Mathematical Programming and Game Theory, Indian Statistical Institute, Delhi, India, January 9, 2017.

Y. Kimura, Resolvents of convex functions in a complete geodesic space with curvature bounded above, The 9th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimizations (ACFPT02016), King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand, May 19, 2016.

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：高阪 史明

ローマ字氏名：(KOHSAKA, fumiaki)

所属研究機関名：東海大学

部局名：理学部

職名：教授

研究者番号（8桁）：20434003

研究分担者氏名：佐藤 健治

ローマ字氏名：(SATÔ, kenzi)

所属研究機関名：玉川大学

部局名：工学部

職名：教授

研究者番号（8桁）：70307164

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。