

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 27 日現在

機関番号：26402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K05216

研究課題名(和文) 帯スペクトルを持つ量子グラフ系における新奇な量子流束

研究課題名(英文) Exotic quantum flux in quantum graph systems with band spectra

研究代表者

全 卓樹 (Zen, Takuju)

高知工科大学・環境理工学群・教授

研究者番号：60227353

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：スペクトル帯ごとに非対称な流れの方向性のある「新規な量子流束」をもつ拡張型クローニヒ=ペニー・モデルを考案しその性質の探求を行った。これは二本の平行直線が周期的に配置された線分によって連結されたもので、接点部における相互作用を二本の直線で異なる強度のデルタ型に選ぶことで実現される。さらにこの数理的単純化として、一列に無限に並んだ二重鎖からなるクローニヒ=ペニー型のモデルが得られることを示し、鎖節点の性質をデルタ型ならびにデルタプライム型に適宜に選ぶことで、帯ごとに異なった非対称量子流束を持つ帯スペクトル群をもつことを示した。これらモデルの有用な単電子デバイスへの応用可能性について考察した。

研究成果の概要(英文)：We have found the exotic quantum transport properties in a double-stranded Kronig-Penney model. Asymmetric fluxes between two strands with suddenly alternating localization patterns are observed as the energy is varied. The zero-size limit of the internal lines connecting two strands is examined using quantum graph vertices with four edges. We also consider a two-dimensional Kronig-Penney lattice with two types of alternating layer with and connections, and show the existence of energy bands in which the quantum flux can flow only in selected directions. We have studied the possible applications of exotic quantum flux in single electron quantum devices.

研究分野：数理物理学、量子力学

キーワード：量子グラフ 帯スペクトル 量子流束 非対称性

1. 研究開始当初の背景

単一量子粒子の流れの制御は、現代の物性物理学の重要な課題の一つである。半導体超微細構造やナノチューブ構造による単電子素子の研究は、量子コンピュータの実現とも関連して、今後も実験理論の両面で精力的に行われるであろう。超微細構造中における量子的粒子の運動の有力な数理的探求に、量子グラフ理論がある。一次元的直線のネットワークからなるグラフを考え、その上での量子的粒子の力学を考えるものである。量子グラフ理論の近年の進展により、グラフ上の量子粒子の離散スペクトル、連続スペクトルの構造に関する研究は、飛躍的な発展を遂げた。筆者らによる、グラフ節点の数理の研究、量子的フィルターの研究は、そのようなものの代表である。それは量子グラフ系をもとにした単電子素子の制御に関する多くの知見を与えている。

これに対して、量子グラフ系におけるもう一つの可能なスペクトル構造である「バンド型スペクトル」に関しては、古典的なクローニヒ＝ペニーのモデルの存在にも関わらず、近年あまり注目を集めて来たとはいえない。この状況が改善されて、バンド型スペクトルを持つ量子グラフ系の性質に、より多くの光が当たるべきだと我々は考える。周期的構造を持つ系でブロッホ定理によって現れるバンド型スペクトルは従来の電子素子の動作原理の基盤であって、それゆえ従来型電子素子のさらなる微細化が行き着くべき自然な地点は、周期的構造を持つ量子グラフ系にもとづいた量子単電子素子だと考えられるからである。

2. 研究の目的

本研究で目指したのは、量子グラフ理論におけるスペクトルのバンド構造と、バンド内における量子的流束の研究の新展開である。端緒となるのが、我々が予備的研究で発見した二重鎖クローニヒ＝ペニー模型における新奇な形態の流束である。ここでは二つの鎖を流れる量子流束の相対的方向や強度が、バンドごとに異なる特徴的形態を示す。その結果粒子のエネルギーを変え、流束パターンの激変を生じさせることが可能となる。

ここで鍵となるのが鎖の接点を表す「グラフ節点」の性質である。通常の「デルタ関数型接続」のグラフ節点を用いると、なんら不思議な事は起こらず、元来のクローニヒ＝ペニーモデルと同様の、方位に無特性な量子流束が得られるのみである。ところがデルタ関数型以外の「エキゾチックな」接続条件をもつグラフ頂点を用いると、上記の非等方的、非対称的な流束が惹起され、この様態がバンドごとに異なる、と云う状況が生起する。

すると次の課題が浮かび上がる。いかなる性質のグラフ節点を持ってすれば、どのよう

な様態の新奇な量子流を持ったバンドが発生するのだろうか。その背後に如何なる数理的構造があるのか。これが解明されれば、所望の性質を持った量子流を自在に作るという目標への大きな一歩になる。

非対称な流束を持つ量子グラフとして、予備的研究の4端子グラフ節点を持つものを、6端子節点...、を持つものに考察を拡張する事は容易であろう。また二種類の異なった4端子節点交互に並ぶ系への拡張も興味深い。橋桁状の量子グラフ(図3)を考察する事も、実験的設定を考えると重要であろう。これは更に、二層構造を持つ二次元格子グラフにおける新奇な非一様性、異方性のある量子流束をもったバンドの探求への道を開く。

我々のこれまでの研究で、グラフ節点の種別分類と物理的実現の方法について総合的な知識が蓄積された。重要なのは、節点での波動関数の接続を特徴づける散乱行列の数理的分類である。スケール不変型節点を表す「ユニタリーかつエルミート」な散乱行列の分類が、量子的フィルターの振る舞いに直結する事実も判明した。節点の端子の交換に対する対称性による分類が、積年の数学上の難問「エルミート予想」に新たなアプローチを与える事も示された。

今回の課題は、グラフ節点を特徴づける散乱行列の数学的分類に、新しい視点をもたらす事が期待された。予備的研究で明らかにされたように、非対称な量子流束を生み出すのは「デルタ型」「デルタ＝プライム型」の両性質を兼備し、更に端子の交換に関して非対称なグラフ節点だからである。周期的量子グラフでの非対称な量子流束の解明は、これまでに知られているスケール不変性や交換対称性をもつ行列とは異なった、それを補完するような、グラフ節点を特徴づけるユニタリー行列の数理物理的な下位分類を整備するという課題に、必然的にならざるを得ない。

3. 研究の方法

周期的量子グラフの非対称な流束の数理物理的性質の解明を、次の三つのアプローチをもって行った。

(A) 現存の例の詳細研究：4端子グラフ節点を持つ系の精査と、より広いパラメータ空間の踏査

(B) 一般化された系の研究：一般の偶数端子節点や、異なる4端子節点を交互を持つ系への拡張と、異なる4端子節点を層状に交互を持つ2次元格子系での非等方的流束の探求

(C) 応用、発展：周期量子グラフに外的電場を印加してポテンシャル場を導入した系の考察。外場強度やグラフ節点パラメータの周期的時間変化による、量子ホロノミー現象を利用した系の制御をおこなう等、新しい展開の探求。

研究の手法としては、数学的な諸手法、具体的には解析的手法、微分幾何学的手法を用

い、これを数値実験的、数式処理実験的手法と併用する。また特に、新現象の手探りの研究では必須である故、内外の他研究者との知見交換、特に数学分野、素粒子分野の専門家との異分野交流に重きをおいて研究を進めた。

4. 研究成果

本研究の成果を年度ごとにまとめると以下のようなものである。

(1) 平成27年度

帯スペクトルを持つ量子グラフ系における新規な量子流速を探る目的で、二本の平行直線が周期的に配置された線分によって連結された「拡張型クローニヒ=ペニー・モデル」を考えた。線分と直線の接点部における相互作用を二本の直線において異なる強度のデルタ型に選ぶことで、性質の異なる帯スペクトルを見出すことができた。そして帯ごとに非対称な方向性を持つ量子流束が発見された。この現象の本質をより明確にする目的で、連結線分の長さを0とする極限、すなわち一列に無限に並んだ4端子量子グラフ節点を隣同士二本の線分をつないだ二重鎖クローニヒ=ペニー・モデルを考えた。4端子節点を適宜な形に選ぶことで、ここでも帯ごとに異なった非対称量子流束を持つ帯スペクトル群をもつことが示された。この後者のモデルは、本来のクローニヒ=ペニーモデルの非常に簡単な、しかし非自明な拡張になっており、これによって非対称な量子流のある帯スペクトルを持つ「可解モデル」を構成することに成功したことになる。さらにこのモデルの二次元的な拡張を調べる目的で、格子状に交差した二次元無限量子グラフにおいてデルタ型4端子節点とデルタプライム型4端子節点がどの方向にも交互に現れるものを考えた。期待通りにここでも帯ごとに量子流束の方向が異なる帯スペクトル群を見出すことができた。これらのモデルにおける量子的な流束の制御と、その量子素子としての実現可能性について考察した。

(2) 平成28年度

モデル系において、量子スペクトルにパラメータの周期的変化が与える影響、そのうち特に、いわゆる「新奇量子ホロノミー」と呼ばれる周期的返歌の前後で異なるスペクトル値が得られる現象と、その応用について詳しく調べた。取り上げたモデルは1次元チューブに閉じ込められたボーズ多体系で、チューブの中に、デルタ関数で近似できる非常に狭い範囲にだけ作用する、位置とポテンシャル強度を変化させることのできる斥力的ポテンシャルがあるものを想定した。このポテンシャルをある特定の位置に置き、強度ゼロから始めて無限大にまで変化させた上で、その位置をまた別な位置に断熱的に移動し、そこでポテンシャル強

度を下げて0もどす。この循環的断熱操作によって、最初基底状態にあった系が、その中の全ての粒子が第一励起状態に移った系全体の励起状態へと変化する、すなわち完全な占有数反転が起こせることを示した。さらにこの過程で系に吸収されるエネルギーが、系のボーズ粒子数に比例することを示せた。さらにはこの種の新奇量子ホロノミー現象を一般的に解明すべく、フロケー演算子で記述される周期的ポテンシャル打撃のある系を考察し、関与する位相幾何学的構造を同定することができた。

(3) 平成29年度

グラフ系を伝達する複数粒子の量子系の考察を中心に研究を進めた。粒子がボゾンである場合、多粒子の状態はグロス=ピタエフスキ方程式でよく記述される音が知られている。これはキュービクな非線形をもつ、いわゆるシュレディンガーシュレディンガー方程式の代表的な例である。グラフ上の非線形種シュレディンガー方程式の研究は、いくつかの孤立した研究はあるものの、未だに基本的な部分で未知なことの多い新分野である。最も簡単なグラフ系として、一点に欠陥のあるリングを考え、その上での非線形シュレディンガー方程式の解を調べた。数学的にはこの欠陥点を記述する最も一般的な枠組みは $U(2)$ 群をなす4パラメータによるものである。ここではそのもっとも物理的に実現可能性のある3パラメータのサブセットである「フロップ=筒井デルタ型」天井ポテンシャルを考察した。その結果、非線形項強度パラメータ g の関数として固有状態を描いた場合、線形シュレディンガー方程式($g=0$)にあっては縮退していた(1)実数関数で表される定常状態(2)複素数関数で表される進行波状態の二つがエネルギー的に分離して、発散系($g>0$)側では進行波状態の方がエネルギーが高く、収束系($g<0$)側では低くなること、さらに収束系側に臨海的な g の値があって、それ以下ではそれまでの基底状態である波動関数一定の状態から(3)一定地上にリプルを持つ新たな基底状態が分離する、ということが明らかになった。これによって、グラフ上の多体系における量子流束に、線形シュレディンガー方程式で表される一粒子系では見られない新たな様相があることが見出された。

以上3年間にわたって、当初の研究目標の大部分が達成されたと考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

[1] Taksu Cheon, Serge Galam, Dynamical Galam model, Phys. Lett. A 382 (2018) 1509-1515.

[2] Takaaki Nakamura, Taksu Cheon,

Spectral properties of nonlinear Schrödinger equation on a ring, J. Phys. Soc. Jpn. 86 (2017) 114001(5pp).

[3] 田中篤司、全卓樹「新奇的量子ホロノミー：断熱サイクルで変わらないこと，変わる事」日本物理学会誌 72 (2017) 240-245.

[4] Taksu Cheon, Sergey S. Poghosyan, Spiral orbits and oscillations in historical evolution of empires, Physica A 469 (2017) 353-362.

[5] Atushi Tanaka, Taksu Cheon, Path topology dependence of adiabatic time evolution, Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics. A Festschrift in Honor of Pavel Exner, eds. J. Dittrich, H. Kovarik, A. Laptev (2016) 531-542.

[6] Taksu Cheon, Sergey S. Poghosyan, Weak value expansion of quantum operators and its application in stochastic matrices, Bulletin of Kochi University of Technology 13 (2016) 105-114.

[7] Atushi Tanaka, Taksu Cheon, Complete population inversion of Bose particles by an adiabatic cycle, New J. Phys. 18 (2016) 45023 (7pp).

[8] Taksu Cheon, Jun Morimoto, Balancer effects in opinion dynamics, Phys. Lett. A 380 (2016) 429-434.

[9] Taksu Cheon, Graphical representation of marginal and underlying probabilities in quantum mechanics, J. Kor. Phys. Soc. 67 (2015) 777-784.

[10] Taksu Cheon, Sergey S. Poghosyan, Asymmetric quantum transport in a double-stranded Kronig-Penney model. J. Phys. Soc. Jpn. 84 (2015) 64006 (8pp).

[11] Atushi Tanaka, Taksu Cheon, Bloch vector, disclination and exotic quantum holonomy, Phys. Lett. A 379 (2015) 1693-1698.

〔学会発表〕(計 13 件)

[1] 中村孝明, 全卓樹, Axel Perez-Obiol 「リング上の非線形シュレディンガー方程式のスペクトル構造」日本物理学会第 73 回年次大会。2018 年 3 月 23 日、東京理科大

[2] Taksu Cheon, Dynamical Galam model, International Conference 4rth Dynamics Days Central Asia, 2017.10.21.

[3] 田中篤司。全卓樹「新奇的量子ホロノミーの古典対応物」日本物理学会 2017 年秋季大会、2017 年 9 月 23 日、岩手大

[4] Taksu Cheon, Dynamical systems theory of public opinion, International Conference Chaos, and what it can reveal, 2017.06.06.

[5] 田中篤司, 全卓樹「断熱サイクルによるボーズ粒子系の準位反転」日本物理学会第 72 回年次大会、2017 年 3 月 18 日、大阪大

[6] 中村孝明, 川又将大, 全卓樹「リング上における非線形方程式固有解の準位交差と反発」日本物理学会第 72 回年次大会、2017 年 3 月 18 日、大阪大

[7] 中村孝明, Ondrej Turek, 全卓樹「量子グラフ節点によるスペクトル・フィルターの数学的性質」日本物理学会 2016 年秋季大会、2016 年 9 月 14 日、金沢大

[8] 田中篤司, 全卓樹「断熱的な時間発展の結果は経路のトポロジーで決まる」日本物理学会 2016 年秋季大会、2016 年 9 月 14 日、金沢大

[9] Taksu Cheon, Quantum vertices: Theory and applications, International Conference 3rd Dynamics Days in Central Asia 2016.09.05.

[10] Taksu Cheon, Adiabatic cycles in quantum systems with contact interaction International Workshop on Wave dynamics in branched systems and networks, 2016.05.25

[11] 森本潤, 全卓樹「世論力学拡張 Galam モデルにおける種々のエージェントタイプの効果」日本物理学会第 71 回年次大会、2016 年 3 月 22 日、東北学院大

[12] 森本潤, 全卓樹「世論力学 Galam 模型の新種エージェントによる安定化について」日本物理学会 2015 年秋季大会、2015 年 9 月 19 日、関西大

[13] 田中篤司, 全卓樹「新奇的量子ホロノミーの非断熱拡張の例」日本物理学会 2015 年秋季大会 2015 年 9 月 16 日、関西大

〔図書〕(計 1 件)

伊丹哲郎、松井伸之、乾徳夫、全卓樹 「量子力学的手法によるシステムと制御」(コロナ社 2017 年 12 月)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

http://Researchmap.jp/T_Zen/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

全卓樹 (Zen, Takuju)

高知工科大学・環境理工学群・教授

研究者番号：60227353