様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　　５ 月 １１ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１３４２１

研究課題名（和文）射影多様体上の線型作用の極限のなす半群に関する研究

研究課題名（英文）Research on monoids consisting of limits of linear actions on a projective manifold

研究代表者
齋藤　睦（SAITO, Mutsumi）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：７０２１５５６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：射影一般線型群PGL(V)の１つのコンパクト化としてPM(V)というものを構成し，提案した。PM(V)はPGL(V)を稠密開集合として含むコンパクト位相空間で，射影空間P(V)に作用する半群である。また，PGL(V)のコンパクト化として良く知られたワンダフルコンパクト化との関係も表した。
武田裕康氏と共同で，ゲルファント流超幾何微分方程式系の合流について，冪零正則元を一般化した主冪零p組による随伴作用の極限としての記述を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
PGL(V)のコンパクト化として良く知られたワンダフルコンパクト化は，半群ではなく，射影空間P(V)に作用できない。従って，射影空間P(V)に作用できるコンパクトな半群であるPM(V)は学術的意義があり，今後の応用が期待される。
ゲルファント流超幾何微分方程式系は，そのパラメータ空間の双対が，一般線型リー代数の正則元の中心化代数となるものが今まで知られていたが，より一般な主冪零p組の中心化代数となるものを確定特異点型からの変形を含めて考察したことに意義がある。

研究成果の概要（英文）：As a compactification of the projective linear group PGL(V), I have proposed PM(V). It is a compact topological space including PGL(V) as a dense open subset, and it is a monoid acting on the projective space P(V). In addition, I have related it to the well-known compactification -- the wonderful compactification of PGL(V).
In collaboration with Hiroyasu Takeda, I have made a description of the process of confluence of hypergeometric systems a la Gel’fand, as a limit under the adjoint action of a principal nilpotent p-tuple generalizing a principal nilpotent element.

研究分野：代数学

キーワード：代数半群　線型代数半群　コンパクト化　超幾何微分方程式系

１．研究開始当初の背景

研究代表者は近年，Gel'fand 流の超幾何微分方程式系の合流に関する研究において，単純リー代数の階数次元のリー部分代数の変形を考察している。その際，随伴群がリー部分代数達に作用していて，その作用の極限を扱う。そこで，それら極限をも含めた変換半群の組織的な研究があれば極めて有用であると認識した。(この極限である変換はもはや全単射には（一般的には）ならない。従って，これらの変換全体は群ではなく，半群である。)

この種の先行研究としては, Putcha 及び Renner などによる線型代数半群の理論が挙げられる。これは一般線型群 GL(V)の閉部分群の End(V)における閉包のなす半群の理論で，20 年程前に研究が始まり，線型代数群に準ずる基本理論が構築された。しかし，極限を考える上は, コンパクト化した状況で考えるべきである。

一方, 線型代数群（或いはより一般に対称空間）のコンパクト化の理論としては, De Concini と Procesi による wonderful compactification が良く知られている。また，Neretin はより初等的に hinge の理論を構成し，wonderful compactification と一致することを示した。wonderful compactification は幾何的には素晴らしいものではあるが，半群ではなく，射影空間上に作用できない。

上述のように，線型代数半群の理論も wonderful compactification の理論も確立された美しい理論であるが，上述の超幾何微分方程式系の合流の研究には必ずしも合致するものではないと思われる。

一方，Gel'fand 流の超幾何微分方程式系の合流については，パラメータ空間の双対がリー代数の正則元の中心化代数の場合，木村弘信，高野恭一両氏により，正則元の極限をとることで合流操作の説明がなされていた。確定特異点型の場合，パラメータ空間の双対は一般線型リー代数のカルタン部分代数（正則半単純元の中心化代数）であるが, グラスマン多様体において, カルタン部分代数の（随伴群の作用の）極限は正則元の中心化代数以外もたくさん存在する。従って，パラメータ空間の双対が正則元の中心化代数でない場合の状況を明確にしたいところであった。

２．研究の目的

本研究は，線型代数群のコンパクト化で，射影空間上に作用できるものを構築し，その基礎理論を展開することを目指したものである。

（１）【定義】

そもそも対象となる半群をどのように定義すべきかから不明なので，そこから考察する。強い条件を仮定した定義から，仮定する条件を弱めた定義まで各種比較検討する。その半群が満たすべき条件としては,

① その半群がコンパクトになる位相が入ること。
② 線型代数群が稠密開部分集合であること。
③ 線型代数群がその半群の unit group であること。

が必須である。

（２）【代数的トーラスに対応する理論】

これはトーリック多様体の理論の一部と思われるが，本研究課題に合った言葉で整理する。

（３）【その他の基礎理論】

SL_2 に対応する場合の詳細な研究をもとに，線型代数群の基本理論のうち，線型代数半群でも成功をおさめたものなどを中心に理論を構築する。具体的には，冪等元の理論，正則性の理論，quotient に関する理論，Weyl 群に相当するものの理論，Borel 部分群に相当する理論, Bruhat 分解のような分解理論，共役類に相当する理論などである。

３．研究の方法

「１．研究開始当初の背景」で述べたように，本研究には参考とすべき関連研究がある。それらを研究の指針として活用し，研究を遂行した。

（１）本研究における最も基礎となるシチュエーションから考察する。つまり射影線型群 PGL(V)が射影空間 P(V)に作用しているというシチュエーションである。PGL(V)の作用の極限全体を考察する。より具体的には，PGL(V)内の 1-パラメータ族 A=A(t)を考えたとき，射影空間 P(V)の各元 v に対し，A(t)v の極限で Av を定義してみる。本研究において欲しい作用はこの作用なので，あとは，上述の「1-パラメータ族」の意味を明確化し，そこにこの作用と両立する位相を定義すると良い。

このように考えると，参考になるのは Neretin の hinge の理論である。A=(A_1,…,A_k)が hinge であるとは，各 A_j が V から V への線型関係で，A_j の Kernel が次のものの定義域になっている。よって，A_j の定義域たちが V の partial flag（減少列）を与えている。さらに, hinge では，A_j の像たちが V の partial flag（増加列）であることも要求する。

本研究においても同様のものを考えることになるのだが，A_j の像たちが V の partial flag

（増加列）にならないものも考えたいのである。この理由は例えば，本研究の動機となった，Gel’fand流超幾何微分方程式系の合流に関する応用を視野に入れると必要となると思われるからである。
位相については，上述の作用の極限と両立しないといけないので，考えやすい基本近傍系による定義を採用することにした。

（２）Gel’fand 流超幾何微分方程式系の合流に関する研究については，武田裕康氏と共同で，「１．研究開始当初の背景」で言及した木村弘信，高野恭一両氏の研究と，一般線型リー代数の冪零正則元の一般化を既に行っていた Ginzburg の principal nilpotent pair の理論を参考に研究を遂行することにした。

（３）研究にあたり，研究代表者は北海道大学内で関連する研究者と情報交換や議論をするほか，日本数学会秋季総合分科会や年会，代数学シンポジウム，表現論関係の研究集会，京都大学数理解析研究所などにおける関連する研究集会など，色々な研究集会に出席し，関連する研究者との研究打合せや情報収集を行った。

４．研究成果
研究成果は，PGL(V)のコンパクト化 PM(V)についてのものと，本研究の動機となった，Gel’fand 流超幾何微分方程式系の合流についての２つに分けられる。

（１）PGL(V)の「コンパクト化」として，PM(V)なるものを定義した。まず，集合としては，Neretin の hinge の集合と似ているが，「３．研究の方法」で注意したように，A_j の像たちが V の partial flag（増加列）であることは要求しない。
位相は，各点 A=(A_1,…,A_k)での基本近傍系を定義するのに，各 A_j の近傍を利用して定義した。その「基本近傍系」が実際に基本近傍系の公理を満たすことを示し，その位相に関して，PGL(V)は稠密な開集合であることを示した。
PM(V)がコンパクトであることを示すために，ネットの理論を用いた。一般位相空間論において，位相空間がコンパクトであることと，任意の極大ネットが収束することが同値であることが知られている。そこで，PM(V)の元からなる極大ネットがいつも収束することを示したのである。
また，PM(V)に積を，「３．研究の方法」の（１）の第１段落で言及した作用と両立するように定義した。この積で PM(V)は半群となり，その unit group がちょうど PGL(V)になることを示した。この積の制限：PGL(V)×PM(V)->PM(V)は連続である。
PM(V)は Neretin の hinge と似たものなので，その２つの関係も気になるところである。PM(V)の元 A=(A_1,…A,k)で A_j の像たちが V の partial flag（増加列）になるものを「hinge に対応するもの」と呼ぼう。このとき，hinge に対応するものの集合は PM(V)の（PGL(V)を含む）開集合となり，そこから Neretin の hinge へ全射連続写像を構成した。Neretin の hinge は De Concini，Procesi の wonderful compactification と一致していたから，これで，PM(V)と wonderful compactification との繋がりもついたことになる。
さらに，PM(V)の冪等元に関して一定の成果を得た：PM(V)の hinge に対応する元が unit regular であることを示した。即ち，hinge に対応する任意の元 A に対し，A gA=A となる PGL(V)の元 g が存在する。さらに，hinge に対応する任意の冪等元 A に対し，A の或る共役元が或る分割に対応する対角冪等元になることを示した。特に PM(V)の hinge に対応する元全体の PGL(V)×PGL(V)-軌道の個数は有限である。一方，一般の PM(V)の元 A に対しては，(gA)^3=(gA)^2 なる PGL(V)の元 g が存在することを示した。

（２）本研究の動機となった，Gel’fand 流超幾何微分方程式系の合流については，武田裕康氏との共同研究において以下の成果を得た。
一般線型リー代数の正則冪零元の一般化として，Ginzburg が principal nilpotent pair という概念を既に導入してあったので，それをさらに一般化した principal nilpotent p-tuple という概念をまず導入した（p=1 のときが正則冪零元，p=2 のときが Ginzburg の pair）。この principal nilpotent p-tuple による随伴作用の極限を考察することで，カルタン部分代数の双対をパラメータ空間に持つ確定特異点型超幾何微分方程式系から，principal nilpotent p-tuple の中心化代数の双対をパラメータ空間に持つ超幾何微分方程式系への合流操作を説明することができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① Mutsumi Saito, Hiroyasu Takeda, Confluent hypergeometric systems associated with principal nilpotent p-tuples, International Journal of Mathematics, Vol.29, No.12, 2018, (31

pages), **査読有　（オープンアクセス予定）**
DOI: 10.1142/S0129167X18500799

② Mutsumi Saito, Limits of Jordan Lie subalgebras, Journal of Lie Theory, Volume 27, number 1, 2017, pages 51-84, **査読有**
http://www.heldermann.de/JLT/JLT27/JLT271/jlt27003.htm

〔学会発表〕（計　２　件）

① **齋藤　睦,** PGL(V)**の或るコンパクト化について,** 2017 **年度第** 5 **回半田山・幾何・代数セミナー，２０１７年７月２８日，岡山理科大学**

② **齋藤　睦,** Jordan Lie **部分代数の変形,** RIMS **研究集会「幾何学・組合せ論に現れる環と代数構造」，２０１５年６月１２日，京都大学数理解析研究所**

〔その他〕
ホームページ等
① Mutsumi Saito, Projective linear monoids and hinges,
http://arxiv.org/abs/1711.01397

６．研究組織