2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １０ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４５２

研究課題名（和文）ロボット動力学における特異性判定と代数幾何的手法

研究課題名（英文）Algebro-geometric method for singularity criteria in kinematics

研究代表者
大本　亨（Ohmoto, Toru）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：２０２６４４００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：特異点判定法を用いた研究として，以下のテーマを扱った．（１）曲面の射影微分幾何における局所理論（ダルブー・ヴィルチンスキ）の復興とその応用を目指し，特異点論の手法による研究を進展させた．（２）幾何的代数と特異点論を用いて線織面や線叢などに現れる特異点の微分直線幾何を発展させ，応用幾何学における新しい可能性を示唆した．（３）射影空間内の曲線および曲面に係る古典的数え上げ幾何を整理して，ヴィジョン理論への特性類理論からの新しいアプローチを提案した．（４）判定法の基礎付けとして，判別集合（自由因子）の対数的微分加群とA-接空間の関係について考察した．

研究成果の概要（英文）：We developed effective criteria of singularities of differentiable maps in the following three topics. 1. We have newly developed a local theory originated by Darborx and Wilcynski in projective differential geometry of surfaces in relation with applications to computer vision. 2. Combining Geometric Algebra and classification theory of map-germs, we studied singularities arising in differential line geometry (ruled surfaces, line congruences, etc), that suggests a new method in Applied Geometry. 3. Using classification of map-germs and universal polynomials of singularities, we developed classical enumerative geometry of curves and surfaces, that proposes a new algebro-geometric approach to computer vision. 4. By means of `singularity criteria', we studied A-tangent spaces and logarithmic tangents to discriminants (free divisors).

研究分野：幾何学

キーワード：写像の特異点論　特異点判定法　射影微分幾何　幾何的代数　実代数幾何　コンピュータ・ヴィジョン

１． 研究開始当初の背景

可微分写像・関数の特異点とは，その微分が退化する点である．特異点のまわりでの写像の振舞いは，陰関数定理が成り立たないために本質的に非線形であって，その局所的様相を座標変換を通して分類することが「写像の特異点論」の出発点であった．例えば，２変数関数のモース特異点（極値・峠点）について，ヘッセ行列を用いた判定法が良く知られている．では，ヘッセ行列が退化している場合はどうだろうか？関数分類の判定では 3 ジェット以上を逐次チェックして分類プロセスを追跡する必要があり，いわゆる単純特異点型の判定でも煩雑である（これについてはテイラー係数による福井-バレステロスの代数的な判定法がある）．そこで，より一般に，写像芽の A-同値（左右同値）に関する分類において，使い易い直裁な判定法が期待される．

特異点判定法は，代数的な産物である分類における「標準形」を幾何的に特徴付けるものであり，A-分類理論自体の理解を深める一方で，その簡便な使い易さから特異点論の他分野における応用を促進する．「特異曲面の微分幾何」（梅原-山田-佐治）はその典型例であり，コンピュータヴィジョンやロボティクス等の応用数理分野への適用も想定される．ヴィジョン理論においては，射影空間内の曲面芽の射影変換による局所分類は基本的な問題であり，ダルブーらによる射影微分幾何の初期の問題意識に極めて近い問題設定が考えられる．ロボットマニピュレータとはユークリッド合同変換群のリー環への写像であって，その特異性の分類が問題とされる．これらの幾何学における特異点分類には関数モジュライが現れるが，それらはある種の微分式系の不変量に関連するである．この立場から言えば，今まではジェネリックな部分のみで不変量が研究されていたが，１９世紀のダルブーと同じ対象であって面白みに欠ける．まず余次元が正となる部分での分類を与え，続いて分類固有の微分式系を見いだして，その不変量として関数モジュライの特徴付ける，という問題設定を得た．

また，特異点跡の配置あるいは特異点の個数評価を扱う大域的理論がある．応用上でも，ロボティクスやヴィジョン理論等において，ある種の有理写像の次数を求める問題が多く見受けられる．工学の現場で現れる代数方程式系はまず解けないので，代数幾何的手法等を駆使して解の個数評価を行うことが必要とされている場面がある．例えば，マニピュレータ位置の個数評価や統計推定における最尤次数の評価に（複素化して）チャーン類計算を適用する事例があり，一部の専門家の間で注目されている．そこで特異点判定法を応用して，特性類理論からのアプローチを構築できるのではないかという着想を得た．

２． 研究の目的

平面から平面への写像芽の判定法は，佐治健太郎氏（神戸大・連携研究者）および加葉田雄太朗氏（現九大・研究協力者）によりかなり整備されている．そこで，本申請課題では，可微分写像芽の高次の微分テンソル（内在的微分）を元に写像の特異点分類の「明示的な判定法」を開発・整備し，「判定法の基礎付け」を通して写像芽の A-分類理論の深化を目指す．さらに，ロボティクスなどの数理工学の諸問題において，特異点判定法を効果的に活用することで，特異点分岐に関する局所理論および特異点の個数を評価する大域理論について論じる．本研究の特徴は申請者らが開発してきた特異点の判定法および特異点の数え上げ理論（特性類理論）を全面的に援用する点にある．そこに応用上の新機軸があり，萌芽研究として意味を持つ．

３． 研究の方法

【１．射影微分幾何・コンピュータ・ヴィジョン】３次元射影空間内の曲面について，ある視点からの中心射影として得られる写像芽に関して，加葉田氏（研究協力者）による判定法を用いた解析がある．これを発展させて，モンジュ形式の射影変換による分類（アーノルド・プラトノーバの結果の拡張）や漸近曲線を与える双線形微分方程式の局所分類を与える．特にフレクノーダル曲線（曲面と４次で接する漸近線を持つ点の軌跡）の分岐を詳細に解析することは意匠デザインなど等でも有益であり，実際， D.マンフォードが「フレクノーダル曲線の分岐の分類」をヴィジョン理論の課題として提起している．

【２.ユークリッド幾何･ロボティクス】 ユークリッド空間内の線織面，可展面および線叢の特異点の微分位相的および計量幾何的な局所的形状を考察する．幾何的代数（双四元数）を用いた定式化と写像芽の A-分類理論とを組み合わせたアプローチを提案する．さらにこれを離散微分幾何と合わせて，特異曲面の新しいメッシュ構成法を提案するなど，応用幾何学における連続・離散のハイブリッド手法に繋げたい．

【３．特異点の大域理論】 特異点の大域的理論の応用として，特性類理論を駆使した解の個数評価の新しい手法を創出する．具体的には，３次元射影空間内の曲線や曲面に特殊な接する直線の本数（特異な中心射影の個数）を問う数え上げ問題について，A-分類理論を元にした詳細な数え上げ公式群をトム多項式理論の直裁な応用として与える．これは射影代数幾何の古典的問題の刷新である．またアフィン多項式写像に対する特異点の数え上げ公式を，同変理論を通してトム多項式の応用として解く手法を提案する．

【４．判定法の基礎付け】　写像芽のA-接空間には２つの重要な構造がある：（１）A-接空間のフィルトレーションの構造（T.ギャフニー），（２）写像芽のA-普遍開折における判別集合の切断の接触分類（J.デイモン）．両者の関係は今まで明確にされておらず，特異点判定法の観点からこれらの詳細を解析することは A-分類理論の深い知見に繋がるはずである．普遍開折の判別集合は自由因子であって，それに付随する対数的微分加群の構造はA_n型などでは十分に分かっていることから，これを法とした変形空間の剰余加群の（ベクトル空間としての）生成元が各判定法条件に対応することを明示し，これによりA-接空間のフィルトレーションを具体的に構成する．

４．研究成果

【１】ブラジルと日本の若手研究者（J．D．L．シルバ氏，加葉田雄太朗氏）との国際共同研究（①，③）として，射影空間内の曲面，さらには線織面及び可展面のモンジュ形式を１次変換により分類する理論を発展させた．特異点論の手法によるこの一連の共同研究は，１世紀近く進展のなかった曲面の射影微分幾何の局所理論（ダルブー・ヴィルチンスキ）を今日的な視点で復興させることを目指しており，その端緒として満足できる成果を得た．例えば，マンフォードらが提起していた「放物曲線およびフレクノーダル曲線の局所的分岐の分類問題」について，２パラメータまでの分岐の分類を与えて分岐図式を具体的に図示したのは極めて新しい．線織面や可展面のモンジュ形式の射影分類も行い，共著論文を準備中である．

【２】幾何的代数（＝クリフォード代数）を用いた微分直線幾何への特異点論的アプローチを発展させた．具体的には，線織面や可展開面に現れる特異点分類を双四元数に値を持つ双曲率と双捩率の微係数条件で記述した．幾何的代数と特異点論に関する研究は，アーキテクチュラル幾何やロボティクス等に向けた「応用特異点論」を準備するものであり将来性が十分にある．院生との共著を投稿中．

【３】射影空間内の曲線・曲面をある視点から射影して得られる平面曲線の特異点分類は８０年代になされている．この分類とトム多項式理論を組み合わせて，曲面の特異射影に関する種々の数え上げ公式を与えた（④，⑤）．特異点分類と特性類理論を用いて古典的数え上げ幾何を整理・発展させて，スツルムフェルズらが進めている代数的ヴィジョン理論への応用研究に向けた古くて新しいアプローチを提案した．曲線に関しては院生との共著論文を準備中である．

【４】自由因子を用いた特異点判定法の基礎付けについては，加葉田氏（研究協力者）がウィクアティク氏（サンパウロ大）らと協議し方向性は見えていたが，剰余加群の計算を実行するところで障壁があり，グレブナー基底計算の新しい手法を援用することを検討中である．

上記のほかに，実代数幾何の基礎的問題であった「半代数的集合の可微分三角形分割の存在問題」を塩田昌弘名大名誉教授との共著で肯定的に解決した（②）．これは微分トポロジーにおいても，応用面においても意味がある定理である．さらに塩田教授らと共に，「実解析的写像の解析的構造安定性」の否定的解決に関する研究を進めた（共著論文準備中）．
　【１，２】で得られた分類の各クラスに対して，微分式系の理論を発展させてモジュライの特徴付けを検討すること，また応用幾何の新手法に繋げることは期間内では出来なかった．また【３】のロボティクスへの応用は，上記の他テーマが大きく発展したために計画を変更した．これらは今後の課題として，引き続き検討を続ける．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① J. Deolindo Silva, Y. Kabata and T. Ohmoto, Binary differential equation at parabolic and umbilical points for 2-parameter families of surfaces, Topology and its Applications, 234 (2018), 457–473, 査読有 doi.org/10.1016/j.topol.2017.11.014
② T.Ohmoto, M.Shiota, C1-triangulation of semi-algebraic sets, Journal of Topology 10 (2017), 765–775, 査読有, DOI. 10.1112/topo.12024
③ H. Sano, Y. Kabata, J. L. Deolindo Silva and T. Ohmoto, Classification of jets of surfaces in projective 3-space via central projection, Bull. Brasilian Math. Soc. (2017), 査読有, DOI 10.1007/s00574-017-0036-x
④ T. Sasajima and T. Ohmoto, Thom polynomials in A-classification I: counting singular projections of a surface, Eroupean Math. Soc. Series of Congress Reports, IMPANGA Lecture Notes, Birkhauser, (2017), 203–226, 査読有, DOI 2523-515X
⑤ T. Sasajima and T. Ohmoto, Classical formulae on projective characters of surfaces and 3-folds, revisited, Saitama J. Math. 31 (2017), 141--160 査読有

〔学会発表〕（計５件）

① 大本亨, Geometric Algebra and Singularities in Differential Line Geometry, 研究集会「可微分写像の特異点論の局所的研究と大域的研究」, 京大数解研, 2017.11
② T. Ohmoto, C^1-triangulations and semialgebraic de Rham homotopy theory, 国際研究集会「Singularity Conference」, 上海（中国）, 2017.07
③ T. Ohmoto, Thom polynomial since 1956, R. Thom 記念国際集会, ストラスブール大学（フランス）, 2016.09
④ T. Ohmoto, Hunting invariants of discriminants and images of maps, 国際研究集会「Enumerative geometry of moduli spaces of sheaves」, スイス工科大学（ローザンヌ）, 2016.05
⑤ T. Ohmoto, Classical enumerative geometry and Thom polynomials, 国際研究集会「IMPANGA 15」, バナッハセンター（ポーランド）, 2015.04

６．研究組織

(1)研究代表者
大本　亨（Toru Ohmoto）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：２０２６４４００

(2)連携研究者
佐治　健太郎（Kentaro Saji）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：７０４５１４３２

(3)研究協力者
加葉田　雄太朗（Yutaro Kabata）
九州大学・IMI 研究所・特任助教