様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月　　５ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５０６

研究課題名（和文）局所ラングランズ対応とLubin-Tate perfectoid空間の幾何学

研究課題名（英文）Local Langlands correspondence and Lubin-Tate perfectoid space

研究代表者
津嶋　貴弘（TSUSHIMA, TAKAHIRO）

千葉大学・大学院理学研究院・特任助教

研究者番号：７０５８３９１２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：ラングランズ予想は現在の数論幾何学における主テーマの一つである。フェルマー予想は志村・谷山予想に帰着され、後者の予想をある場合にAndrew Wilesが解決することでフェルマー予想が導かれた。志村・谷山予想はラングランズ予想の一部とみなすことができる。つまりラングランズ予想は数論に重要な帰結を及ぼす予想であることがわかる。このラングランズ予想に関して局所版と大域版の二つがある。局所ラングランズ対応に関して局所的な幾何学を調べることで理解を精密化することを目標として研究を行った。またそれに伴った表現論的な研究も同時に行った。これにより有限群の表現論に関しても新しい結果を導くことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
整数論は素数という非常に捉え難い数学的対象を研究する学問である。一方で高校生でならう放物線のような図形を抽象化し統一的に扱う枠組みを与えそれをより深く理解していく分野に代数幾何というものがある。これら代数幾何と整数論は一見するとかけ離れた分野のように見える。ところが20世紀においてGrothendieckという数学者が現れこの二つを結び付ける新しい視点を導入し、代数幾何の言語を根底から基礎付けて整数論における重要な帰結を導いた。この分野をGrothendieckが命名した通り数論幾何と呼ぶ。この数論幾何の分野における本研究で得られた結果は整数論的にも学術的な意義があると考えている。

研究成果の概要（英文）：Langlands program is one of main themes in arithmetic geometry. Fermat's last theorem is reduced to Shimura-Taniyama conjecture. Andrew Wiles solves Fermat's last theorem by proving a special case of Shimura-Taniyama conjecture. Shimura-Taniyama conjecture is regarded as a part of Langlands program.
Hence Langlands program deduces many important results in number theory.
We have given a refinement on understanding of local Langlands program by studying geometric nature of Lubin-Tate spaces. We have studied a representation theoretic background of reduction of certain affinoids in the Lubin-Tate spaces. More precisely, we introduce a variety over finite field, whose middle cohomology realizes Heisenberg--Weil representation of unitary groups. This construction rises several applications in representation theory of finite groups. We have searched an application to modular representation theory.

研究分野：数論幾何

キーワード：Lubin-Tate空間　局所ラングランズ対応　局所ジャッケ・ラングランズ対応　Heisenberg-Weil表現　ユニタリー群　Howe対応

１．研究開始当初の背景
ラングランズ対応は数論において重要な主テーマの一つである。一般線型群に関する局所ラングランズ対応はHarris-TaylorやBoyerらにより解決されている。その対応は明示的では無いためどのような対応であるかをより深く理解することは重要な問題である。表現論の理論にタイプ理論というHenniart, Bushnell, Kutzkoにより発展させられた分野がありその理論とLanglands対応との関係性に関しては未解決な問題が多数存在する。特にタイプ理論と幾何学との関係は謎が多い。

２．研究の目的
上のような背景に伴い局所ラングランズ対応をより明示的に理解しこの対応をより精密に理解すること、また先のタイプ理論との関係を幾何学的な観点で理解することが本研究の目的である。具体的にはLubin-Tate空間の幾何学的様子を調べることで局所ラングランズ対応を精密に理解することが目的である。

３．研究の方法
様々な幾何学的対象に伴い定義されるエタールコホモロジー論とタイプ理論を用いる。rigid geometryと有限体上の代数多様体を結び付けるためにLubin-Tate空間のaffinoid部分空間を調べる。affinoidから還元という概念が定まりこれは有限体上の代数多様体を定める。有限体上の代数多様体に関するエタールコホモロジー論と有限群の表現論を使ってその還元のコホモロジーの構造を研究する。その結果としてLubin-Tate空間全体のコホモロジーに関する理解を深め上の目的に合致する理解を得る。

４．研究成果
(1) Lubin-Tate perfectoid空間の中でsimple supercuspidal表現と結び付くaffinoid部分空間を発見しその構造を詳しく調べた。simple supercuspidal表現に関してタイプ理論との関係で局所ラングランズ対応と局所ジャッケ・ラングランズ対応を完全に明示的に理解することができた。この成果においては、simple supercuspidal表現と結び付くガロワ表現のイプシロン因子を具体的に計算することが非常に難しい部分であった。Deligne-Laumonの積公式などの数論的な技術を多く駆使して計算が成された。また標数2の場合に二次形式に付随するArtin-Schreier多様体に対して、開多様体の場合のTate予想を解決するという少し興味深い結果も得られた。これらは計四つの論文にまとめてうち二つは当該期間中にアクセプトされた。残り二つは投稿中である。

(2) 剰余標数が2でない等標数の局所体上の二次元の非可換Lubin-Tate理論の純局所的な証明を与えた。(1)ではperfectoid空間の枠組みで研究を行っていたがLubin-Tate理論だけを使ってこの証明はなされる。この証明のポイントは還元に現れる曲線の中間コホモロジーが共通してある性質をみたすことに着目する。それはコンパクト台を持つ中間コホモロジーから普通のコホモロジーへの写像が単射になるという性質である。この性質が上の証明をする上で非常に重要な役割を果たす。

(3) (1)で考えたsupercuspidal表現よりもっと深い導手を持つsupercuspidal表現に関してもそれを実現するaffinoidの族を構成した。時本一樹氏がtameの場合に分岐系列のsupercuspidal表現を実現するaffinoidを構成した。これに触発されwildの場合にも同じような多様体を構成したいというのが動機となりこの研究を行った。その結果として導手にある程度の条件を課せば類似のaffinoidを見つけることができた。その還元にあらわれる多様体のコホモロジーに二つのHeisenberg群が作用しておりそれがsupuercuspidal表現を生み出す。この多様体へのフロベニウス固有値の計算に関して発見したことをまとめて論文を一つ完成させた。これ

は当該期間中に出版することができた。

(4) 不分岐型のspercuspidal表現を幾何学的に実現するaffinoidをBoyarchenkoとWeinsteinが構成している。その還元に現れる多様体の表現論的背景を理解したいという動機のもとでそれと類似の有限体上の多様体を導入しその中間コホモロジーにHeisenberg-Weil表現が現れることを発見した。このようなことは道具立てとしては80年代までに揃っていたが新しく発見できたことは有意義なことであると考えている。その多様体のコホモロジーを、ある特別なフェルマー多様体のコホモロジーと結び付けることができる。そのことによりDeligne-Lusztig指標で記述することができる。これはWeil表現の指標公式を使えば代数的に証明可能なことではあると思われるが幾何的に理解できたことは少し興味深い。またHowe対応に関する応用もありそれも研究した。具体的には斜交群と二次の直交群に対するHowe対応が標数2の場合を含み統一的に定式化できて冪単性が保たれることが証明できた。

(5) 先ほどフェルマー多様体との結びつきについて言及したがこれのmod lコホモロジーを研究した。このような基本的な問題については先行研究や文献などあると思い色々調査してみたが文献としては見当たらなかった。モジュラー表現論の知られていることを色々と組み合わせてフェルマー多様体のコホモロジーを研究した。その結果斜交群のある既約表現のmod l指標が既約になるというモジュラー表現論においても新しい結果を得た。これによりmod l Howe対応を定式化し半単純化しない精密な形の対応を構成した。この研究ではmod l指標だけを調べるのではなくコホモロジーをExtensionの情報込みで完全に理解することができる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　8　件）

1. Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Affinoids in the Lubin–Tate Perfectoid Space and Simple Supercuspidal Representations I: Tame Case, to appear in International Mathematics Research Notices, rny229, https://doi.org/10.1093/imrn/rny229, in press, 査読有.

2. Takahiro Tsushima, On middle cohomology of special Artin–Schreier varieties and finite Heisenberg groups, Forum Math., 31(1): 83-110, (2019), 査読有.

3. Tetsushi Ito and Takahiro Tsushima, Cuspidal representations in the cohomology of Deligne–Lusztig varieties for GL(2) over finite rings, Israel Journal of Mathematics, Vol 226, Issue 2, 877-926, (2018), 査読有.

4. Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Local Jacquet-Langlands correspondences for simple supercuspidal representations, Kyoto J. Math. 58 no.3, 623-638, (2018), 査読有.

5. 津嶋　貴弘, Perfectoid空間論の基礎, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B64: Algebraic Number Theory and Related Topics 2014, 219-255, (2017), 査読有.

6. Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Affinoids in Lubin-Tate surfaces with exponential full level two, Contemporary math 691, 157-181, (2017), 査読有.

7. Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Stable models of Lubin-Tate curves of level three, Nagoya Math J. 225, 100-151, (2017), 査読有.

8. Takahiro Tsushima, On a tower of good affinoids in X_0(p^n) and inertia action on the reduction, J. Math. Sci., Tokyo 23, No.1, 289-347, (2016), 査読有.

〔学会発表〕（計　9　件）

1. 津嶋 貴弘、「モジュラー曲線の Lefschetz 数」, 南田温泉アップルランド「整数論サマースクー ル」、2015/8/20.

2. 津嶋 貴弘、「P. Scholzeの志村多様体のコホモロジーのトーションに関する研究について」、倉敷シーサイドホテル、倉敷整数論集会 2015, 2015/7/29.

3. Takahiro Tsushima, “Stable reduction of Lubin-Tate curve with finite level structures and Lusztig theory over finite rings ’, ヒルトンニセコビレッジ, 研究集会「レギュレーター in ニセコ 2015」、北海道ニセコ, 2015/9/9.

4. 津嶋 貴弘「Lubin-Tate曲線の安定還元と有限環上のLusztig理論について」、神戸大学「代数セミナー」, 2015/10/30.

5. 津嶋 貴弘,「二次元Lubin-Tate理論の局所的証明について」,「プロジェクト研究集会2015」、ハートピア熱海, 2016/3/10.

6. 津嶋 貴弘,「二次元非可換ルビン・テイト理論の局所的証明について」、東北大学「代数セミナー」, 2016/5/19.

7. 津嶋 貴弘,「パーフェクトイド空間について」、「可換環論と数論幾何の新展開 ~ホモロジカル予想を通じて~」、名古屋大学, 2017/6/26.

8. 津嶋 貴弘「有限体上の Weil 表現の幾何学的構成と Howe 対応への応用について」、数論合同セミナー、京都大学、2018/11/16.

9. 津嶋 貴弘,「有限体上のユニタリー群に対する Weil 表現のエタールコホモロジーを使った構成について」、「プロジェクト研究集会2018」、ハートピア熱海、2019/3/7.

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。