

平成 31 年 4 月 17 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17580

研究課題名(和文) 時間発展する曲面上における流体の流れの数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of fluid flow on evolving surfaces

研究代表者

古場 一 (Koba, Hajime)

大阪大学・基礎工学研究科・助教

研究者番号：80707729

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：時間発展する曲面上(形状が変化する曲面上)における流体(液体や気体)の流れを支配する方程式を現象かつ理論的な観点から考察し、時間発展する曲面上の流体の流れがどのような支配のもとで流動し、その流れがどのように変化していくかを数理的手法によって明らかにすることがこの研究の目的である。時間発展する曲面上における流体の流れが持つエネルギー(密度)に着目し、曲面上の流体の流れが満たすべき関係式、熱の伝わりや濃度の拡散を支配する方程式の構築を行った。また、熱力学の法則を曲面上で取り扱えるように理論拡張を行い、曲面上に関する方程式の保存則や保存形(満たすべき物理則)や自然な境界条件が明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究により、時間発展する曲面上における流体の流れ、熱の伝わりや濃度拡散などを支配する方程式が数理的手法によって得られ、地球表面上の雲の流れや空中を浮遊するシャボン玉内部の表面流の流れが理論的に取り扱えるようになった。また、ケッチャップやマヨネーズなどの高粘性流体(非ニュートン流体)の数理モデリングも行い、従来構築されていた幾つかの非ニュートン流体や曲面上の流体の流れに関するモデル方程式に数理的妥当性を与えることに成功した。

研究成果の概要(英文)：We are interested in the dominant equations for the motion of fluid on an evolving surface. An evolving surface means that the surface is moving or the shape of the surface is changing along with the time. Applying our energetic variational approaches, we make several mathematical models for fluid flow on evolving surfaces. Moreover, we investigate the conservative forms and conservation laws of our fluid systems on the evolving surface.

研究分野：偏微分方程式論、数理モデリング

キーワード：数理モデリング 流れ 流体 時間発展する曲面 エネルギー 圧縮性流体 非圧縮性流体 非ニュートン流体

1. 研究開始当初の背景

大気や海洋などの大規模なスケールの流体（液体や気体）のことを総称して地球流体とよぶ。地球流体の流れは、自転や公転している地球表面上の流体の流れとして捉えることができる。また、大気や海洋は、界面（海面）によって気相（大気）と液相（海洋）の二相に区切られており二相流体としてとらえることが自然である。特に、二相流体において、界面（時間発展する曲面）の動きが重要な役割を果たす。そのため、地球流体の流れを解明するためには、時間発展する曲面上における流体の流れを研究する必要がある。

ここで、大気中を漂うシャボン玉を考える。シャボン玉は形状を変化させながら浮いており、そのシャボン膜内に流れが生じていることが確認できる。その流れは表面流とよばれ、時間発展する曲面上の流れとして捉えることができる。シャボン玉の研究では表面張力が重要な役割を果たしていることも知られている。また、生物流体において生体膜内のタンパク質等の動き（流れ）は、時間発展している曲面内の粒子の流れとして捉えることができる。

表面流や界面流などの時間発展する曲面上に関する流れは、20世紀初頭 Boussinesq (引用文献) によってその存在が認識され、Scriven (引用文献) により曲面上の流体に関する応力テンソルが予想（導入）され、その後、主に実験や数値実験により表面流の研究が行われてきた。数学的には、固定曲面を多様体とみなし、参考文献、により多様体上の流体方程式が構築された。は、非粘性流体（粘性がない流体）を取扱い、変分原理を応用して方程式を導出している。は、曲面に関するテンソルを数学的に拡張し粘性のある非圧縮性流体方程式を構築している。

しかし、その多様体上の方程式は保存則を満たさないなどの数理的妥当性の問題が存在している。そのため、時間発展する曲面上の流体の流れを支配する方程式を数理的手法により導出し、数理的妥当性を検証することが求められる。

本研究では、時間発展する曲面上（内）の流体の流れに着目し、地球流体の流れ、シャボン膜内の流体の流れ、生体膜内の流体の流れを数理的手法によって解明することを目指す。

2. 研究の目的

本研究の目的は、時間発展する曲面上における流体の流れを支配する方程式を現象かつ理論的な観点から考察し、時間発展する曲面での流体の流れがどのような支配のもとで流動し、その流れがどのように変化していくかを数理的手法によって明らかにすることである。具体的には、解析的手法と幾何的手法を用い、時間発展する曲面上の流体の流れを支配する方程式を導出し、方程式の解や構造を調べることである。以下の5つの目的・予想を解明することが主な研究の目的である。

- (1) 時間発展する曲面上における流体を非圧縮性流体と圧縮性流体に分類し、エネルギー変分法を用い時間発展する曲面上の非圧縮性及び圧縮性流体方程式を導出する。領域内の流体と同様に非圧縮性流体と圧縮性流体に分類できると予想される。また、領域内の偏微分方程式を導出する数理的手法であるエネルギー変分法を改良することにより曲面上の方程式に対しても適応できると期待される。
- (2) 熱の影響を考慮した時間発展する曲面上における流体方程式の導出を行い、熱力学的観点からの妥当性を検証する。領域内における熱力学の基礎法則を曲面上で取り扱えるように理論拡張することで、曲面上の流体に関する内部エネルギー、エンタルピー、エントロピーや自由エネルギーについて解明できると期待される。
- (3) ケッチャップや片栗粉を水に溶かした流体などの水とは違った振る舞いをする非ニュートン流体の流れに関する数理モデリングを行う。粘性による散逸エネルギー密度に着目することにより、時間発展する曲面上における非ニュートン流体の支配方程式が導出できると予想される。
- (4) 境界のある時間発展する曲面上における流体方程式の導出および保存則をみたすための自然な境界条件を明らかにする。また、複数の曲面片が結合した曲面上の流れに関する方程式の考察を行う。境界のある曲面上におけるベクトル場の発散定理を応用することで、方程式の自然な境界条件が得られると予想される。
- (5) 導出した時間発展する曲面上の方程式の解の存在や性質を調べる。曲面の動きに制限を課すことで方程式の時間局所解が得られると予想される。

3. 研究の方法

関数解析、リーマン幾何学や計量幾何学等の数理的手法を用いて研究を遂行していく。具体的には、時間発展する二次曲面（群）上の流体の流れを考える。二次曲面をユークリッド三次元空間に埋め込み、ユークリッド空間の座標の立場から流れが満たすべき方程式を導出する。曲

面の動きと曲面上の流体の流れを合成した速度、運動エネルギーや散逸エネルギーのエネルギー密度に着目して、変分原理や熱力学の基本法則を用いて支配方程式を構築する。方程式の保存則や保存形、自然な境界条件を調査し、導出した時間発展する曲面上における流体方程式の数理的妥当性を調べる。研究目的(1) (5)に対して、以下の5つの研究を行う。

- (i) 曲面上の流体に関する非圧縮性と圧縮性の特徴づけを行う。具体的には、曲面上の流体の密度と圧力(表面張力)に着目し、曲面上の流体の非圧縮性と圧縮性の分類を行う。また、曲面上の非圧縮性と圧縮性流体に関するエネルギー密度を定め、エネルギー変分法という数理モデリングの手法を用いて支配方程式を導出する。
- (ii) 熱の影響を考慮した時間発展する曲面上の流体方程式の導出を行う。具体的には、領域内に関する熱力学の基本法則を曲面上で取り扱えるように理論拡張し、曲面上の流体に関する内部エネルギー、エンタルピー、エントロピー、自由エネルギーを調査する。また、時間発展する曲面上における流体の流れの法線方向に着目し、曲面上の流体方程式の保存則や保存形を調査し、数理的妥当性を検討する。
- (iii) ケチャップや片栗粉を水に溶かした流体などの非ニュートン流体の流れに関する数理モデリングを行う。まず、領域内における非ニュートン流体の流れに関する数理モデリングを行い、領域内の非ニュートン流体に関するエネルギー密度を調べる。そのエネルギー密度を時間発展する曲面上の非ニュートン流体に適用できるように拡張し、曲面上の非ニュートン流体の流れの数理モデリングを行う。
- (iv) 境界のある時間発展する曲面上における流体の流れに関する数理モデリングを行う。境界のある曲面上における発散定理から曲面の境界に関する情報を取り出す。また、複数の曲面が結合した曲面上におけるエネルギー密度を定め、エネルギー変分法を用いて流体の流れや濃度拡散の数理モデリングを行う。
- (v) 時間発展する曲面上のソボレフ空間を特徴づけし、その関数空間において、導出した時間発展する曲面上の方程式の解の存在や性質を調べる。

4. 研究成果

エネルギー変分法という数理モデリングの手法を用いて、時間発展する曲面上における非圧縮性および圧縮性流体の流れを支配する方程式を導出することができ、導出した曲面上の流体方程式に対して熱力学的観点からの妥当性を与えることに成功した。また、非ニュートン流体や境界のある曲面上における流体の流れの数理モデリングも得られた。この研究成果から、地球流体の流れやシャボン玉の膜内の石鹸水の流れなどが理論的に解析できるようになり、様々な流体現象の解明につながることを期待できる。研究の方法の(i) (v)に対し、以下の研究成果を得た。

- (I) 時間発展する曲面上における非圧縮性および圧縮性流体の流れを支配する方程式が導出することに成功した。時間発展する曲面上における非圧縮性流体を表面積を保存するような流れとして特徴づけることが可能であることを理論的に示すことができた。また、時間発展する曲面上における非圧縮性流体と圧縮性流体とでは、流体の圧力の役割が違うことが証明できた。
- (II) 熱の影響を考慮した時間発展する曲面上における流体方程式が得られた。また、曲面上における流体の内部エネルギー、エンタルピー、エントロピー、自由エネルギーの満たすべき条件や方程式が得られ、さらに、時間発展する曲面上における流体方程式の保存則や保存形を発見し、導出した方程式に対し熱力学的な観点からの妥当性を与えることに成功した。
- (III) 動く領域内および時間発展する曲面上における非ニュートン流体の流れを支配する方程式が得られ、これまで提唱されていた幾つかの非ニュートン流体方程式に数理的妥当性を与えることができた。この研究成果により、曲面上における非ニュートン流体の流れを理論的に解析できるようになった。
- (IV) 境界を持つ時間発展する曲面上における圧縮性流体方程式および拡散方程式が導出できた。また、運動量保存則や角運動量保存則を満たすための自然な境界条件が解明できた。複数の曲面が結合している曲面上の濃度拡散方程式および保存則をみたすための自然な境界条件が得られた。しかし、複数の曲面が結合して曲面上の流体の流れに関してはさらなる考察が必要である。
- (V) 曲面上におけるソボレフ空間の特徴づけはできたが、時間発展する曲面上における流体方程式の可解性については、さらなる考察が必要であり、今後のさらなる研究が必要である。

< 引用文献 >

- M. J. Boussinesq, " Sur l'existence d'une viscosité superficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide contigu ", Ann. Chim. Phys. 29 (1913), 349--357.
- L.E. Scriven, " Dynamics of a fluid interface Equation of motion for Newtonian surface fluids ". Chem. Eng. Sci. 12 (1960), 98--108.
- V.I. Arnol'd, " Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits ". (French) Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 1966 fasc. 1 319--361.
- Michael E. Taylor, " Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations ". Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 9-10, 1407--1456.

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

- Hajime Koba, Chun Liu, and Yoshikazu Giga, "Energetic variational approaches for incompressible fluid systems on an evolving surface". Quart. Appl. Math. (Quarterly of Applied Mathematics) 査読有, 75 (2017), no 2, 359--389. MR3614501.
Doi:10.1090/qam/1452
- Hajime Koba, "On derivation of compressible fluid systems on an evolving surface". Quart. Appl. Math. (Quarterly of Applied Mathematics) 査読有, 76 (2018), no. 2, 303--359.
Doi: <https://doi.org/10.1090/qam/1491>
- Hajime Koba and Kazuki Sato, "Energetic variational approaches for non-Newtonian fluid systems", Z. Angew. Math. Phys. (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik) 査読有, (2018) 69: 143, 1—28.
<https://doi.org/10.1007/s00033-018-1039-1>.

[学会発表] (計 9 件)

- 古場一, " 時間発展する曲面上における圧縮性流体方程式の導出 ", 日本数学会 2016 年度年会、2016 年 3 月 18 日、筑波大学
- 古場一, " 時間発展する曲面上における熱の影響を考慮した非圧縮性流体方程式の導出 ", 日本数学会 2016 年度年会、2016 年 3 月 18 日、筑波大学
- 古場一, " 時間発展する曲面上における非圧縮性流体方程式の導出 ", 日本流体力学会年会 2016、2016 年 9 月 26 日、名古屋工業大学
- 古場一, " 時間発展する曲面上における圧縮性流体方程式の保存形や保存則に関して ", 日本数学会 2017 年度年会、2017 年 3 月 26 日、首都大学東京
- 古場一, " 時間発展する曲面上における圧縮性流体方程式について ", 日本流体力学会年会 2017、2017 年 9 月 1 日、東京理科大学
- 古場一, " 境界を持つ時間発展する曲面上における圧縮性流体の流れの数理モデリング ", 日本流体力学会年会 2018、2018 年 9 月 5 日、大阪大学
- 古場一, " Double bubble 内の濃度拡散の数理モデリング ", 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会、2018 年 9 月 24 日、岡山大学
- 古場一, " 境界を持つ時間発展する曲面上における熱の伝わりや濃度拡散の数理モデリング ", 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会、2018 年 9 月 27 日、岡山大学
- 古場一, " 境界を持つ時間発展する曲面上における圧縮性流体の流れの数理モデリング ", 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会、2018 年 9 月 27 日、岡山大学

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

特になし

6. 研究組織

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。