様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５８７

研究課題名（和文）Pκλ構造を用いた組み合わせ論的問題の解析

研究課題名（英文）On combinatiral problems using P_kappa lambda structures

研究代表者
薄葉　季路（Usuba, Toshimichi）

早稲田大学・理工学術院・准教授

研究者番号：１０５１３６３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：無限組み合わせ論に関して、非分岐原理のイデアル理論への応用、組み合わせ論的性質を通した基数とPκλとの比較、リンデレフ位相空間への巨大基数の応用などが得られた。反映原理に関して、強い反映原理と弱い反映原理の分離、およびパラコンパクト空間の特徴づけなどの応用が得られた。
また、集合論的多元宇宙論、集合論的地質学に関して、基本定理である基礎モデルの下向き有向性を証明することに成功し、また、巨大基数が存在するならば最小の基礎モデルが存在することなどを示した。

研究成果の概要（英文）：On infinitely combinatorics, we obtained various results such as: applications of the unbranching principle to the ideal theory, comparison between cardinals and P_kappa lambda via combinatorial properties, applications of large cardinals to Lindeloef spaces. For the reflection principle, we separated the strong reflection principle from the weak one, and got the characterization of paracompact spaces.
In addition, for the set-theoretic multiverse and the set-theoretic geology, we showed the fundamental theorem that the downward directedness of all ground models. Furthermore, we proved that there exists the minimum ground model if there exists a large cardinal.

研究分野：公理的集合論

キーワード：巨大基数　反映原理　集合論的多元宇宙論　無限組み合わせ論　集合論的地質学

1．研究開始当初の背景

（1）集合論研究者の長年の成果により様々な独立命題，すなわち通常の数学的手法では証明も反証もできない命題，の発見や分類が行われてきたが，その過程で発見された技術を逆に応用することにより，ZFC の定理を発見する，という逆転現象が見られてきた．その中で代表的なものは特異基数とよばれる無限基数に関する研究である．特異基数の研究は近年 Shelah が開発した PCF 理論によって大幅に進歩した．この理論の無限構造、とくにイデアル理論への応用として、非分岐原理と呼ばれる新種の原理が導入された．この原理よりイデアルの飽和性の問題が解決できるだけでなく，未解決問題である特異基数上の Chang の仮説が否定的に決定可能など，様々な応用があることがわかっている．一方で，現在この原理が実際に ZFC の独立命題であるかどうかはわかっていない．

（2） Goedel は巨大基数公理と呼ばれる新種の公理を導入することで連続体問題の解決を図ったが，素朴な形ではこれは不可能であることが既に判明している．一方，巨大基数公理を一般化した generic 巨大基数公理では事情が異なる．実際に Foreman は generic 巨大基数公理のもとでは，一般化された連続体仮説が成り立つことを示している．このようにして，generic 巨大基数公理の研究は連続体問題の解決のための主要な研究テーマとなった．その際に重要になるのが半順序構と定常集合の概念である．「定常集合は何個の定常集合に分割化か？」という問題は，単なる組み合わせ論的な問題にとどまらず，飽和イデアルと呼ばれる generic 巨大基数の定式化の一つへとつなげることが可能である．いくつかの部分解は得られていたが，一般連続体仮説から分割不可能な定常集合の非存在を示すことができるか？などは，現在は部分的な解決しか得られていない．

2．研究の目的

（1）本研究では，「Pκλ構造」と呼ばれる無限組み合わ論的構造を中心にして一般連続体仮説，特異基数構造など集合論的組み合わせ論命題，また Ramsey 性や一般位相空間などへの応用を調べていく．

特異基数に関しては，Pκλ上の新原理である非分岐原理を中心に研究を進めていく．特に，巨大基数公理と非分岐原理の関係などを考察していく．また，非分岐原理の位相空間論や順序集合論への新たな応用も考察する．FRP 原理と呼ばれる原理は位相空間論に関して様々な応用をもつことがすでに判明しているので，そこで開発された技法と組み合わせることも目指す．

Pκλ構造に関しては，一般連続体仮説から分割不可能な定常集合の非存在を考察していく． Pκλ構造の Ramsey 性に関しては，Ramsey 性から超コンパクト公理とよばれる巨大基数が導かれるかを考察する．

3．研究の方法

Pκλ構造上の分割問題と Ramsey 性については既にこの分野で様々な結果を得ている阿部吉弘，松原洋，および Pierre Matet との共同研究を行う．特に従来一般連続体仮説を仮定していた証明されていたものが外せるか，あるいは本質的に必要かどうかなどを調べる．

位相空間論と非分岐原理の研究に関しては，現在日本で集合論研究の中心になっている神戸大学のグループ，および Frank Tall との共同研究を行う．特に Lindeloef 空間と巨大基数との関係，および巨大基数と Pκλ構造を用いた反映原理が位相空間論にどのような影響を与えるかを調べる．

4．研究成果

（1）特異基数上の非分岐原理に関しては、おおむね計画通りの結果が得られた。特に非分岐原理のもとでのイデアルの飽和性の様々な特徴づけが得られ、これにより非分岐原理の下では飽和性、分割不可能性、基数保存性などがすべて同値となることを示し、よって非分岐原理の下での定常集合の分割問題の解決に成功した。また、非分岐原理と特異基数上の組み合わせ論を用いることで、Jonsson 基数上の Jonsson イデアルは常に飽和性、基数保存性などの強い性質を持たないことを証明することにも成功した。これらの結果をまとめた論文を国際学術雑誌に投稿し、すでに採用が決定している。一方で、非分岐原理が ZFC から常に証明可能かどうか、という問題については未解決であり、今後の課題として残された。

（2）Pκλ上の組み合わせ論に関して、基数κ上の分割の性質と巨大基数の関係についての様々な結果が得られた。特に Pκλの Subtle 性がある種の分割の性質で特徴づけ可能であることを示した。また、超コンパクト基数などの通常の巨大基数とは対照的に、Pκλの subtle 性がκの subtle 性を導かないことがあり得ることを証明し、さらにそのような状況は通常の subtle 性よりはるかに強い性質であることを発見した。研究の過程で subtle の変種である faint 性についても研究を行い、faint 性もまた分割の性質で特徴づけ可能であることを示した。これらの結果をまとめた論文を国際学術雑誌に投稿し、すでに出版がなされている。しかしながら Pκλ上の Faint 性とκ上の faint 性の関係については未解決であり、今後の研究課題である。

κ上のイデアルの選択性、P-point 性、Q-point 性などの組み合わせ論的性質は、Pκλ上に自然に持ち上げることが可能であるが、本研究の結果として、イデアルが極大イデアルであるときはそれらの振る舞いが一致するが、そうでない場合はκ上と Pκλ上では非常に異なる振る舞いを見せること

が明らかになった。とくに、正規イデアルはκ上で常に選択性をもつが、Pκλ上では、特異基数仮説の否定などの非常に不自然な仮定を置かなければ Pκλ上の正規イデアルが選択性を持つとは限らない、などの結果が得られている。これらの結果に関して、国際研究集会での発表を行い、現在、国際学術雑誌に投稿すべく論文を準備中である。

（３）Pκλ上のイデアルと一般連続体仮説の関係に関して、松原洋、酒井拓士との共同研を行った。Pκλ上の定常集合で「薄い」集合があれば、そこらから弱い連続体仮説が導かれるが、本研究では、構成可能宇宙やスクウェア原理などの反巨大基数的仮定のもとでは、薄い定常集合が存在することを示した。逆に、薄い定常集合が存在しないことがあり得ることを強制法により示すことにも成功した。これらの結果をまとめた論文を国際学術雑誌に投稿、現在査読が行われている。

（４）Pω_1λ上の定常集合の反映の性質に関して、Pω_1ω_2 上の弱い反映原理が強い反映原理を導かないことが知られているが、従来の証明を大幅に簡略し、また構成のための仮定も最適なものに弱めることに成功した。同時に、大域的な準定常集合の反映原理がPω_1ω_2の強い反映原理やFRP原理すら導かないことを示した。この結果をまとめた論文がすでに国際学術雑誌において出版されている。今後はこの結果を発展させ、大局的な弱い反映原理から強い反映原理が導かれないことを示すことが次の目標となる。

（５）位相空間論への無限組み合わせ論への応用に関しては、スクウェア原理などの組み合わせ論的原理の下で、点 Gδであるリンデレフ空間で連続体濃度を超えるものが構成可能であることを示した。点 Gδであるリンデレフ空間の濃度に関しては未解決な部分が多いが、この結果は、巨大なリンデレフ空間が存在しない状況が巨大基数的性質であることを示しており、今までの幾つもの試みが不成功に終わった理由を如実に語るものである。また、Cohen 強制のような非常に簡単な強制法でも、点 Gδであるリンデレフ空間で連続体濃度を超えるものが強制可能であることを示し、従来の強制法を用いた構成法を非常に簡略化することにも成功している。これらの結果については国際研究集会において発表を行った。また、結果をまとめた論文を国際学術雑誌に投稿、すでに出版されている。同様の手法で、リンデレフ空間の積空間の被覆の性質が非常に強い形で壊れることの新たな証明を発見し、この結果をまとめた論文を国際学術雑誌に投稿した。

一方で、点 Gδなリンデレフ空間で連続体濃度を超えるものが存在しない状況がZFCと整合的であるかは今後の課題として残されることとなった。

（6）位相空間の反映原理に関して、とくにパラコンパクト空間の反映に関しての結果が得られた。FRP 原理よりもつよい反映原理であるAxiom Rの変種を仮定することで、第一可算、正則、局所コンパクト空間がパラコンパクトである必要十分条件が、ω_1と同相な部分空間を持たず、任意の可分閉集合がリンデレフの性質を持ち、かつℵ_1 族ハウスドルフであることが必要十分であることを示した。正規空間に関しては同様のことが知られていたが、本研究により正則空間に対しても成り立つことが明らかになり、先行研究をさらに精密化することに成功した。また、これらの結果は位相空間論における反映原理の有効性、およびω_1の考察の有用性を大いに示している。この結果をトポロジーの研究集会で発表を行い、また、結果をまとめた論文を現在準備中である。

（７）当初の計画では想定されていなかった、近年盛んに研究されている集合論的地質学および集合論的多元宇宙論と超巨大基数に関する重要な結果がいくつか得られた。超コンパクト基数が強い閉包性をもつ強制法で保存されることが整合的なことは知られていたが、Bagaria、Hamkins， Tsapronisとの国際共同研究によって、拡張可能基数などのいくつかの非常に強い巨大基数は、強い閉包性をもつ強制法では常に破壊されることが明らかになった。この研究においては、内部モデルの定義可能性が非常に重要な役割を果たしているが、この議論を発展させることで、集合論の宇宙の基礎モデル全体が下向きに有向であることを証明することに成功した。この証明は、基礎モデルの定義可能性と組み合わせ論的議論を積み重ねることで、具体的に二つの基礎モデルの共通基礎モデルを構成することで行われている。この下向きの有向性は、基礎モデル全体、および強制拡大全体の構造を研究する「集合論的地質学」「集合論的多元宇宙論」の基本的な性質であり、その真偽は長年の未解決問題であったが、本研究によって下向きの有向性が定理であることが示され、この分野の基本定理となった。この基本定理により、基礎モデル全体の共通部分である「マントル」が強制法で不変なZFCのモデルであること、基礎モデル全体は極小元を持つならば最小元を持つことなどが明らかになった。また、超巨大基数の一つであるハイパー膨大基数が存在するならばマントル自身が基礎モデルになることも同時に明らかにした、すなわち、巨大基数が存在するならば最小の基礎モデルが存在することが明らかになった。別の研究において、この巨大基数の仮定は拡張可能基数にまで落とすことが可能であることが明らかになり、これにより、超コンパクト基数とそれより大きな巨大基数との間には非常に大きなギャップがあることが判明した。これらの結果についていくつかの国際、国内研究集会で発表を行い、また、結果をまとめた論文を国際学術雑誌に投稿、すでに出版されている。

本定理の証明においては、選択公理を非常に強く用いた議論が必要であるが、現代集合

論においては選択公理が無い状態での強制法の使用は非常に一般的なものとなっている。このことを踏まえて、選択公理なしでの基礎モデルの定義可能性、および基礎モデルの下向きの有向性の証明などが今後の課題である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１１件）
① Toshimichi Usuba, New combinatorial principle on singular cardinals and normal ideals, Mathematical Logic Quarterly，査読あり，掲載決定済み.
② Toshimichi Usuba, The downward directed ground hypothesis and large cardinals, Journal of Mathematical Logic，査読あり，Vol. 17, No. 2, 2017, 1750009.
DOI: 10.1142/S021906131750009X
③ Toshimichi Usuba, Large regular Lindeloef spaces with points G_delta, Fundamenta Mathematicae，査読あり，Vol. 237, 2017, 249-260.
DOI: 10.4064/fm296-8-2016
④ Toshimichi Usuba, Reflection principles for omega_2 and semi-stationary reflection principle, Journal of Mathematical Society of Japan，査読あり，Vol. 68, No. 3 2016, 1081-1098.
DOI:10.2969/jmsj/06831081
⑤ Toshimichi Usuba, Subtle properties and partition relations, Mathematical Logic Quarterly，査読あり，Vol. 62, No. 1-2, 2016, 59-71.
DOI:10.1002/malq.201400040
⑥ Joan Bagaria, Joel David Hamkins, Konstantinos Tsapronis, Toshimichi Usuba, Superstrong and other cardinals are never indestructible, Archive for Mathematical Logic，査読あり，Vol. 55, No. 1-2, 2016, 19-35.
DOI:10.1007/s00153-015-0458-3
（他６件）

〔学会発表〕（計　２５件）

① Toshimichi Usuba, Set-theoretic geologies, Workshop on Computability and Foundations of Mathematics，招待講演，2017 年 9 月 9 日，Singapore(Singapore).
② 薄葉季路，パラコンパクト空間と強制法公理，第 64 回トポロジーシンポジウム，招待講演，2017 年 8 月 22 日，東海大学(東京).
③ Toshimichi Usuba, Set-theoretic geologies, 6th European Set Theory Conference，招待講演，2017 年 7 月 3 日，Budapest(Hungary).
④ 薄葉季路，集合論の宇宙-universe と multiverse-，日本数学会２０１７年度年会，企画特別講演，2017 年 3 月 24 日，首都大学東京(東京).
⑤ Toshimichi Usuba, Lindeloef spaces and large cardinals, Toposym 2016，招待講演，2016 年 7 月 26 日，Prague(Czech republic).
⑥ Toshimichi Usuba, Selective ideals over P_kappa lambda, 1st Pan Pacific International Conference on Toplogy and Applications，招待講演，2015 年 11 月 26 日，Minnan(China).
（他、国際集会９件、国内集会１０件）

〔図書〕（計　　０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
薄葉季路（USUBA, Toshimichi）
早稲田大学理工学術院准教授
研究者番号：10513632

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者

Joan Bagaria
ICREA and Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència, Universitat de Barcelona, professor.

Joel David Hamkins
The Graduate Center, The City University of New York, professor

Konstantinos Tsaprounis
Department of Mathematics, University of the Aegean, posdoc fellow.

松原　洋(MATSUBARA Yo)
名古屋大学大学院情報学研究科教授

酒井拓士（SAKAI Hiroshi）
神戸大学大学院システム情報学研究科准教授

石井 大海(ISHII, Hiromi)
筑波大学大学院数理物質科学研究科大学院生

山浦 真生(YAMAURA, Naoki)
筑波大学大学院数理物質科学研究科大学院生