

令和 2 年 6 月 8 日現在

機関番号：13501

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16H03921

研究課題名(和文) シューベルト・カルキュラスの深化

研究課題名(英文) Deepening of Schubert Calculus

研究代表者

成瀬 弘 (NARUSE, Hiroshi)

山梨大学・大学院総合研究部・教授

研究者番号：20172596

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,700,000円

研究成果の概要(和文)：通常コホモロジーにおけるシューベルト・カルキュラスに登場する種々の対称関数の同変K理論における類似物について、代数的・幾何学的・組合せ論的な観点から総合的に調べることができた。さらに、それらを含む拡張となる一般コホモロジーにおける類似物、および複素鏡映群での同様の対応物を母関数などにより、統合的に記述して、それらの相互関係をより明確にした。また、Hook公式をシューベルト・カルキュラス視点から見ることで、これまで知られている公式を含むより一般化された形での大きな範囲の公式群を作ること成功した。これらの事により、代数学・幾何学と組合せ論との新しい融合の見地を開拓することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで、シューベルト・カルキュラスの分野は日本ではあまり研究が進められていなかった。この研究の成果により、同変シューベルト・カルキュラスが強力な新しい研究手法であることが裏付けられることになった。幾何学におけるさらに新たな手法と融合して、今後のこの研究分野の進展が大いに期待できるものとなったと考えられる。

研究成果の概要(英文)：In this research, from algebraic, geometric and combinatorial view points, we generalize the usual cohomology theoretic symmetric functions which appear in Schubert calculus to equivariant K-theory. Furthermore we consider analogous objects in generalized cohomology theory and complex reflection group setting and study the relations via their generating functions. Another achievement is a generalization of hook formula. From these results, we get new perspectives on algebra, geometry and combinatorics.

研究分野：代数学

キーワード：シューベルト・カルキュラス 同変K-理論 Hall-Littlewood函数 Hook公式 一般コホモロジー シューベルト・カルキュラス グロタンディエク多項式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

シューベルト・カルキュラスの周辺での研究は、日本ではこれまであまりなされていなかった。2009年に発表された、池田・成瀬の励起ヤング図形を用いた古典型のグラスマン多様体の同変コホモロジー環の記述に関する論文を契機に、日本においてこの分野への関心が高まり2012年に大阪市大において、シューベルト・カルキュラスの国際研究集会を開催することができた。その後、「シューベルト・カルキュラスの組合せ論とその応用」(2013年度—2015年度)の研究課題で科学研究費による補助を受け、同変シューベルト・カルキュラスについて、組合せ論的な視点から研究を進めた。特に、同変 K 理論におけるシューアの P, Q -関数の類似物となる GP, GQ -関数を新しく導入して、研究を前進させた。この新しい研究対象を用いた、シューベルト・カルキュラスの分野でのさらなる研究の深化が望まれるものとなっていた。

2. 研究の目的

新しい研究対象であるシューアの P, Q -関数の類似物となる GP, GQ -関数およびその同変類似である factorial GP, GQ -関数を用いて古典型の旗多様体の同変 K 理論のシューベルト・カルキュラスの代数的・幾何学的枠組みを整備すること。さらにそれらの一般コホモロジーへの拡張や関連する対称関数、特に Hall-Littlewood 関数について、同変シューベルト・カルキュラスの視点からの一般化を試みる。これらの研究を通して、シューベルト・カルキュラスについての理解を深めるとともに、その研究成果を応用できるような従来の別の研究課題や新たな研究対象を見つけて理論的な深化をしてゆくことを目的とした。

3. 研究の方法

研究の方法としては、次のようなものを基本とした。研究対象についての具体的な計算例を計算機ソフトなども利用して豊富に用意する。その計算例をもとに、成り立つ予想式などの候補を見つけ出す。さらに、別の計算例などを行い予想式の検証を行う。それと並行して関連する理論的なバックグラウンドを調べ、種々の手法との関連性を調べた。また、シューベルト・カルキュラスと深く関連していると思われる国際研究集会に積極的に参加して、関連情報を収集したり研究発表を行ったりして研究者との交流を行った。直接に話をするすることで、未発表の題材やアイデアなどを議論することもあった。

4. 研究成果

(1)量子同変コホモロジーにおける B, C, D 型グラスマン多様体のシューベルト基底

A 型の場合に知られていた Factorial シューア関数を用いた、グラスマン多様体の量子コホモロジー環における同変シューベルト類の実現と同変コホモロジー環の生成元と関係式による記述を参考に B, C, D 型の場合に行った。用いた手法としては、知られている Pieri rule を比較して、抽象的な可換環のレベルでの同型写像を構成するという方法で、A 型の場合の類似であるが、この証明の過程で、A 型で知られている証明に一部不備があることもわかり、古典型のグラスマンに共通する結果が実質この成果により得られることになった。

(2)Casselman 問題の解決

A. Lascoux 他により導入された A 型の Hecke 環の Yang-Baxter 基底を semisimple Lie 群の場合に一般化を行い、既定の変換行列に関する双対性を証明した。また、それらを用いて p 進代数群の表現に関する Casselman 問題を解決した。シューベルト・カルキュラスの分野で知られている Yang-Baxter 関係式を p 進代数群の表現論に応用することができた。この視点は、さらに Hecke 環を用いて Hook 公式を拡張する(10)の研究業績に発展した。

(3)ループ空間の一般コホモロジー

B_n 型と C_n 型のグラスマン多様体は、 n を無限大にするとループ空間と同等のものになる。このような極限の場合を調べることで、有限の n の場合のすべての情報をまとめて扱うことが可能となる。この着眼点から通常コホモロジーでの知られているシューベルト基底を一般コホモロジーの場合に一般化した基底を代表する多項式(形式べき級数)についての基本的な考察を行った。この際に、ホモロジー・コホモロジーの双対性が重要な視点となりホップ代数構造が如何に反映されるか、さらに同変の構造がどのように反映されるかについての基本的な性質をまとめることができた。この結果をもとにさらに詳細の性質を調べて行くための基盤を構成することができたと考えられる。

(4)古典型二重グロタンデック多項式の代数的・組合せ論的記述

A 型の二重シューベルト多項式はその K -理論版として二重グロタンデック多項式が考えられていた。BCD 型の二重シューベルト多項式は Ikeda-Mihalcea-Naruse により幾何学的な考察を基に構成された。同様の方法で、それらの K -理論版も構成は可能であるが、それとは別の視点で、Fomin-Kirillov のアイデアに基づく A 型のシューベルト・グロタンデック多項式を Yang-Baxter 関係式を用いて構成する方法を、BCD 型に拡張することを A. N. Kirillov 氏との共同研究で行い、同変 K -理論におけるシューベルト基底の標準的な対象の組合せ論的な記述を確立することができた。

(5)同変 K 理論の退化跡

通常コホモロジーの場合に、シューベルト類をベクトル束の退化跡で表すことは、古くからなされていて、行列式表示などの公式が知られていた。この研究では、通常コホモロジーでの結果を K 理論の場合に拡張する試みを行った。幾何学的な構成方法を K 理論の中に翻訳することで、形式冪級数を用いて知られている行列式公式やパツフィアン公式を K-理論の場合に自然に拡張する形になっていることが分かった。さらにこの方法で作られた多項式は既に知られている A 型のグロタンディエク多項式に一致すること、また B 型や C 型の場合にはやはり対応物として構成された多項式に一致することも確認できた。

(6)普遍的 Gysin 公式

シューベルト・カルキュラスに登場するシューア関数やシューア Q 関数などは、ベクトル束の push-forward (あるいは Gysin 公式とも呼ばれる) で記述されることが良く知られている。この研究では、それらの一般コホモロジー版を統一的に構成する方法について研究を行った。特に、Hall-Littlewood 関数及びその同変版 push-forward で構成する普遍的 Gysin 公式を作った。

(7)Hall-Littlewood 関数の一般コホモロジー類似物の母関数公式の代数的証明

Hall-Littlewood 関数を一般コホモロジーの場合に拡張した関数を定義することができる。この関数は自然数の分割に応じて定められる対称関数となっているが、分割が 1 成分の場合の母関数を用いて、分割が複数の成分の場合の母関数を構成することが可能である。通常コホモロジーの場合は、Macdonald の対称関数の教科書に書かれている。この研究ではその母関数を一般コホモロジーの場合にも一部修正することで、同様の証明方法で母関数が記述できることを示した。

(8)逆平面分割の母関数に対する Hook 公式の証明

R.Proctor により研究が進められた d-complete poset の上の逆平面分割の母関数を表示する Hook 公式について、これまで完全な証明は発表されていなかった。名古屋大学の岡田聡一氏との共同研究により、シューベルト・カルキュラスの手法を用いることで、より一般化された形でこの Hook 公式を証明することができた。証明には、旗多様体の同変 K-理論とその Chevalley 公式を用いる。一般化された形では、d-complete poset の 2 つのフィルター F, G について G が F に含まれるとき、 F から G を除いた F/G という skew の poset 上の逆平面分割の母関数を記述することができ、 G が空集合のときは Proctor が求めたものに一致する。同変 K-理論での知られている結果と組合せ論的な考察により証明が完結する。池田岳氏と共同で考案した励起ヤング図形というシューベルト・カルキュラスでの新しい組合せ論の対象が有効に働く良い例となった。組合せ論的な研究分野においても代数的・幾何学的な手法を組合せ論の問題に適用した例として大きな影響を与えるものと考えられる。

(9)Hall-Littlewood 関数の複素鏡映群のシューベルト類としての解釈

Totaro により、Hall-Littlewood 関数が、複素鏡映群のシューベルト類の類似物であることが、すでに知られていたが、その幾何学的な背景は不明であった。この研究では、これまでの古典型のグラスマン多様体の同変シューベルト基底として、factorial Schur 関数と P-Q-関数が対応するという結果を参考にして、factorial Hall-Littlewood 関数を新しく導入し、これが複素鏡映群のシューベルト類の類似物であることを、同変コホモロジーでの GKM 条件の類似物を用いることで、説明することができた。

(10)Hook 公式の一般化とその証明

Hook 公式には、(8)の Gansner 型のもので仲田の Hook 公式と呼ばれる別種のものが存在している。仲田の Hook 公式は、(2)の Casselman 問題に関連した Bump-Nakasuji 予想と密接な関連があることを以前から観察していたが、幾何学的な背景を持つ Motivic Chern 類を使うことで、Bump-Nakasuji 予想が解決されてことを基に、この 2 種類の Hook 公式を統合する新たな Hook 公式を発見することに成功した。(Mihalcea, Su との共同研究) 現在のところは、A 型グラスマン多様体の場合を含む有限 Weyl 群に付随する d-complete poset に対してのみ公式は証明されているが、Kac-Moody 型の Weyl 群の場合にも同様の公式が成立することが予想できる。シューベルト・カルキュラスを Hecke 環のレベルで見直すことができ、今後のこの分野での進展が期待できる。

(11)励起ヤング図形を用いた KP, BKP 階層の解の記述

シューア関数が偏微分方程式の KP 階層の解を記述するために有効に使われることは佐藤幹夫氏により発見されたことで有名であるが、シューベルト・カルキュラスとの関係については、グラスマン多様体が使われることから初期より認識はされていたものの、一般的に知られていること以上に踏み込んだ理解はこれまであまりなされて来ていない。B 型の類似として BKP 階層があり、これについてはやはりシューアの Q 関数が有効に使われることも神保・三輪氏等の結果で知られていた。数年前に津田塾大学の執行氏がシューアの Q 関数で展開した関数が形式解

となるための係数の間の関係式の必要十分条件を、パツフィアンを用いて記述することに成功した。研究代表者はその結果を、シューベルト・カルキュラスで登場する Factorial シューア Q 関数に適用することで、BKP 階層の解となっていることを示した。さらにこれを一般化して、励起ヤング図形を用いて係数を決めることで、新たな解や形式化が作れることも同様に導くことができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hiroshi Naruse	4. 巻 16
2. 論文標題 Elementary proof and application of the generating function for generalized Hall-Littlewood functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 197--209
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2018.09.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masaki Nakagawa and Hiroshi Naruse	4. 巻 708
2. 論文標題 Universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 201--244
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/conm/708	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 成瀬 弘	4. 巻 2103
2. 論文標題 ユニタリ鏡映群の同変シューベルト・カルキュラスに向けて	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 137--146
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 T. Hudson, T. Ikeda, T. Matsumura and H. Naruse	4. 巻 320
2. 論文標題 Degeneracy loci classes in K -theory ---determinantal and Pfaffian formula---	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 115 ~ 156
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.aim.2017.08.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Ikeda, L.Mihalcea and H.Naruse	4. 巻 53
2. 論文標題 Factorial P- and Q-Schur functions represent equivariant quantum Schubert classes	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 591--619
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) none	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 M.Nakasuji and H.Naruse	4. 巻 none
2. 論文標題 Yang-Baxter basis of Hecke algebra and Casselman's problem (extended abstract)	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 DMTCS proc. BC	6. 最初と最後の頁 935--946
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) none	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A.N.Kirillov and H.Naruse	4. 巻 39
2. 論文標題 Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using IdCoxeter algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 695--728
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) none	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M.Nakagawa and H.Naruse	4. 巻 71
2. 論文標題 Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 337--417
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) none	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naruse Hiroshi、Okada Soichi	4. 巻 2
2. 論文標題 Skew hook formula for d -complete posets via equivariant K -theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 541 ~ 571
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.5802/alco.54	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hudson Thomas、Ikeda Takeshi、Matsumura Tomoo、Naruse Hiroshi	4. 巻 546
2. 論文標題 Double Grothendieck polynomials for symplectic and odd orthogonal Grassmannians	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 294 ~ 314
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.11.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Some combinatorial properties of dual factorial Schur functions
3. 学会等名 Workshop on Algebraic and Enumerative Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Hook formula and equivariant K -theory
3. 学会等名 Crystals and Their Generalizations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 成瀬 弘、岡田 聡一
2. 発表標題 逆平面分割の母関数と同変K-理論
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 成瀬 弘
2. 発表標題 ユニタリ鏡映群の同変シューベルト・カルキュラスに向けて
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Equivariant K-theory and hook formula for skew shape on d-complete set
3. 学会等名 Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 成瀬 弘
2. 発表標題 シューベルト・カルキュラスの視点からの Hall-Littlewood函数の一般化・母函数表示と応用
3. 学会等名 日本数学会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 成瀬 弘
2. 発表標題 一般化されたHall-Littlewood函数の母函数表示についての代数的証明と応用
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Maki Nakasuji and Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Yang-Baxter basis of Hecke algebra and Casselman's problem (extended abstract)
3. 学会等名 FPSAC 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Coxeter groups and hook formulas
3. 学会等名 Flags, Galleries and Reflection Groups (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Generalized colored hook formula
3. 学会等名 New interactions between Geometry and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 成瀬 弘
2. 発表標題 Dual factorial Schur P-関数は BKP 階層の解
3. 学会等名 2019日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 H.Naruse, T.Ikeda, M.Masuda and T.Tanisaki (eds)	4. 発行年 2016年
2. 出版社 Mathematical Society of Japan	5. 総ページ数 518
3. 書名 Schubert Calculus ---Osaka 2012	

〔産業財産権〕

〔その他〕

成瀬 研究室 紹介 http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~hnaruse/index.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	池田 岳 (IKEDA Takeshi) (40309539)	岡山理科大学・理工学部・教授 (35302)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	中川 征樹 (NAKAGAWA Masaki) (50370036)	岡山大学・教育学研究科・准教授 (15301)	
連携研究者	中筋 麻貴 (NAKASUJI Maki) (30609871)	上智大学・理工学部・准教授 (32621)	
連携研究者	沼田 泰英 (NUMATA Yasuhide) (00455685)	信州大学・学術研究院理学系・准教授 (13601)	
連携研究者	石川 雅雄 (ISHIKAWA Masao) (40243373)	琉球大学・教育学部・教授 (18001)	