

令和 3 年 4 月 22 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16H03925

研究課題名(和文)高次元代数多様体の双有理幾何学

研究課題名(英文)Birational geometry for higher-dimensional algebraic varieties

研究代表者

藤野 修 (Fujino, Osamu)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：60324711

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,800,000円

研究成果の概要(和文)：私は主に高次元複素射影多様体に興味があります。コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の理論を使用し、小平消滅定理のいくつかの強力な一般化を確立しました。また、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の変動の理論についても研究しました。私は混合ホッジ構造の変動の理論の高次元代数多様体への応用に興味があります。小平の標準束公式の一般化を証明し、この新しい結果をいくつかの幾何学的問題に適用しようとしています。また、2020年には飯高予想に関する本を出版しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この5年間の主な研究成果は、混合ホッジ構造の変動の理論を高次元代数多様体の研究に組織的に持ち込んだことである。すでにコンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造が高次元代数多様体論で有益であることは知っていたが、混合ホッジ構造の変動も考えることで様々な応用が考えられることに気づいた。安定多様体のモジュライ空間の射影性の証明は一番最初の素朴な応用である。

研究成果の概要(英文)：I am mainly interested in higher-dimensional complex projective varieties. I have already established some powerful generalizations of the Kodaira vanishing theorem by using the theory of mixed Hodge structures on cohomology with compact support. I have also studied the theory of variations of mixed Hodge structure on cohomology with compact support. Now I am interested in applications of the theory of variations of mixed Hodge structure for higher-dimensional algebraic varieties. I obtained a generalization of Kodaira's canonical bundle formula and now tries to apply this new result for some geometric problems. In 2020, I published a book on the litaka conjecture.

研究分野：代数幾何学

キーワード：極小モデル理論 混合ホッジ構造 トーリック多様体 双有理幾何学 小平消滅定理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) 代数多様体の双有理分類理論の歴史はとても長い。2次元までの分類理論は今や古典なので、ここでは述べない。現在の双有理分類の標準理論は、極小モデル理論である。1980年ごろに森重文の驚異的なアイデアによって極小モデル理論は生まれた。極小モデル理論は森理論と呼ばれることも多い。20世紀後半は主に3次元代数多様体の極小モデル理論が詳しく調べられた。21世紀に入ると、Shokurovのアイデアを実行するという形で4次元以上の極小モデル理論が爆発的に発展した。たくさんの研究者の多大なる貢献の後、Birkar-Cascini-Hacon-McKernanによる大論文で一般型代数多様体を含む広いクラスに対して極小モデル理論は一般次元で解決された。その後、大発展が続き、BirkarによるBorisov-Alexeev-Borisov予想の解決でこの方面の研究はある意味一つの頂点に達したと考えられる。これが2016年の研究開始当初の状況である。ちなみに、Birkarは上の仕事で2018年にフィールズ賞を受賞している。

(2) 上で述べたShokurovの哲学に基づく極小モデル理論の発展とは少し異なる流れとして、混合ホッジ構造の理論を組織的に利用して極小モデル理論の適用範囲を究極的に拡張しようという試みがあった。Ambroによるquasi-logスキームのアイデアもその一つであった。私は混合ホッジ構造の理論と混合ホッジ構造の変動の理論を極小モデル理論に応用することを研究の中心に据えていた。

2. 研究の目的

(1) 究極的な目標は、極小モデル理論の完全解決である。もっとも難解な未解決問題の一つはアバダンス予想と呼ばれている。極小モデルの存在もまだ完全には証明されていない。これらの予想に関しては色々研究されており、例えば、非消滅予想のように簡単に見える予想から極小モデルの存在がしたがうということが知られている。残念ながらこれら予想を短期間で解決するだけのアイデアも能力も持ち合わせていないので、極小モデル理論の完全解決に向けて様々な研究を試みることが現実的な研究目標であった。

(2) もう少し具体的に述べたい。私は、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造や、その変動を詳しく調べることにより、小平消滅定理の強力な一般化や半正值性定理の一般化が証明できることをすでに示していた。これが私の今までの研究の中心の一つであった。これら強力な道具を高次元代数多様体の幾何学の問題に応用できるような枠組みを整備し、様々な未解決問題を論じるための土台を作ることがこの5年間の研究目的、研究目標であった。

3. 研究の方法

(1) この5年間の主な研究方法は、混合ホッジ構造の変動の理論であった。藤澤太郎(東京電機大学)との共同研究で2014年に出版された混合ホッジ構造の変動に関する論文がある。これは素朴にSteenbrinkやZuckerらによる幾何学的な議論を一般化したものであり、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の変動に関するものである。同じ結果は斉藤の混合ホッジ加群の理論を使って証明することもできる。その方法は藤澤太郎と斉藤盛彦(京都大学数理解析研究所)との共同研究で2014年に発表済みである。これらの結果は非常に強力であるが、高次元代数多様体論への応用に適した形には整備されていなかった。簡単な応用として安定多様体のモジュライ空間の射影性を証明した論文を発表したが、まだ十分に幾何学に応用できていない状態であった。

(2) この5年間の間に、basic slc-trivial fibrationsなる概念を導入した。これは小平の楕円曲面に対する標準束公式の一般化の一つと考えられる。この新しい概念の基礎理論を整備することにエネルギーを注ぎ込んだ。目先の問題を解決するためでなく、広い範囲の問題に適用可能な枠組みを作ることが目標であった。正しい枠組みさえ完成すれば、自然と応用は付いてくるというのが私の基本的な考えである。

4. 研究成果

(1) 上に述べたように、数年前に得ていた混合ホッジ構造の変動の理論の結果を幾何学に応用するための枠組みをつくり、基本的な性質を調べた。研究はまだ継続中であり、これから数年かけて本格的に応用を考えていく予定である。結果は論文としてまとめ、いくつかの論文はすでに雑誌への掲載が決定している。一部分は藤澤太郎、Haidong Liuとの共同研究である。

(2)主に混合ホッジ構造関連の話題のみ述べてきたが、それ以外の話題も研究している。一つはトーリック多様体に関するものである。佐藤拓(福岡大学)と共同研究で、トーリック多様体の長い端射線の振る舞いについていくつかの結果を証明し、論文として出版した。トーリック多様体の結果のいくつかは10年以上前に得たものであり、出版せずに放置してしまっていた。久しぶりに研究を再開して新しい発見があり、とても有意義であった。また、飯高予想についての入門書を執筆し、Springer社から出版した。最近是中国で大学院生向けに入門的な連続講義をしたり、他大学での集中講義、大学院生向けのハイレベルな講義などを通じて後進の指導にも力を入れているつもりである。自分一人のできる研究に限界を感じつつあるので、今後も機会があれば若手に刺激を与えられるような講演や講義をしていきたいと考えている。

(3)私の研究は流行にのったものではなく、地味に極小モデル理論の基礎部分の刷新をはかったものである。未解決問題を解決したり、全く新しい新領域を切り拓いたような仕事ではない。みんなが当たり前のように扱ってきた基礎部分を見直し、今まで見落としていた豊かな世界を掘り起こしたような仕事である。既存の枠組みで研究を始めてしまった研究者が新しい基礎に乗り換えるには大きな困難を伴うので、私の作った枠組みが本格的に活躍するのは、これからこの分野の研究を始める若い世代がどの程度私の枠組みを使うかにかかっていると思う。10年後、20年後には極小モデル理論の基礎部分は私の仕事が標準になっていると信じている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計24件（うち査読付論文 24件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Osamu Fujino	4. 巻 187
2. 論文標題 Semipositivity theorems for moduli problems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Ann. of Math.	6. 最初と最後の頁 639--665
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4007/annals.2018.187.3.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Fujino	4. 巻 69
2. 論文標題 On subadditivity of the logarithmic Kodaira dimension	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1565--1581
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/06941565	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計23件（うち招待講演 23件 / うち国際学会 14件）

1. 発表者名 Osamu Fujino
2. 発表標題 Minimal model theory for log surfaces
3. 学会等名 Algebraic Surfaces and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Osamu Fujino
2. 発表標題 Simple connectedness of Fano log pairs with semi-log canonical singularities
3. 学会等名 The 24th Symposium on Complex Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Osamu Fujino
2. 発表標題 Bertini type theorem for multiplier ideal sheaves
3. 学会等名 Stability, boundedness and Fano varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 藤野 修
2. 発表標題 安定多様体のモジュライ空間について
3. 学会等名 第4回社の都代数幾何学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Osamu Fujino
2. 発表標題 Injectivity theorem for pseudo-effective line bundles and its applications
3. 学会等名 Pacific RIM Conference on Mathematics 2016, Seoul National University, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Osamu Fujino
2. 発表標題 Vanishing theorems for complex projective varieties
3. 学会等名 The Asian Mathematical Conference 2016, Bali Nusa Dua Convention Center, Bali Indonesia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 Osamu Fujino	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 128
3. 書名 litaka conjecture : an introduction	

1. 著者名 Osamu Fujino	4. 発行年 2017年
2. 出版社 The Mathematical Society of Japan	5. 総ページ数 289
3. 書名 Foundations of the minimal model program	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年 2017年～2017年
--------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
中国	Xiamen University		