

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16H03932

研究課題名(和文) ツイスター空間の研究

研究課題名(英文) Study on twistor spaces

研究代表者

本多 宣博 (Honda, Nobuhiro)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：60311809

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,100,000円

研究成果の概要(和文)：4次元コンパクト自己双対多様体に付随するツイスター空間は3次元コンパクト複素多様体である。そのほとんどはケーラー計量を許容せず、さらには(射影代数多様体と双有理的でないという意味で)非代数的であることが知られている。本研究ではコンパクトツイスター空間でケーラー計量は持たないが(射影代数多様体と双有理的であるという意味で)代数的なものについてその構造を調べた。任意のツイスター空間に対して、基本系と呼ばれる線形系があり、ツイスター空間の構造は基本系に属する因子の構造によりかなり限定されることが知られていた。本研究では、基本系が1次元以上であるような代数的コンパクトツイスター空間の構造定理を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自己双対計量とツイスター空間の研究はペンローズにより、物理現象を複素数を用いた幾何学、すなわち複素幾何により理解する目的で始められたが、そこで見出された方法や対象は純粋数学においても多くの応用や成果をもたらした。本研究はツイスター理論を純粋数学における対象として考察するものである。このような研究は世界的に見てあまりなされておらず、独自性があるものだと思われる。また本研究で最終的に得られた構造定理は(当初の予想に反して)かなりシンプルなものである。

研究成果の概要(英文)：The twistor spaces associated with 4-dimensional compact self-dual manifolds are 3-dimensional compact complex manifolds. Most of them do not admit a Kahler metric, and moreover, they are known to be non-algebraic (in the sense that they are not bimeromorphic to projective algebraic varieties). In this study, we investigate the structure of compact twistor spaces that do not have a Kahler metric but are algebraic (in the sense that they are bimeromorphic to projective algebraic varieties). For any given twistor space, there is a linear system called the fundamental system, and it was known that the structure of the twistor space is considerably limited by the structure of a divisor belonging to the fundamental system. In this study, we obtained a structure theorem for algebraic compact twistor spaces such that the fundamental system is of dimension one or more.

研究分野：幾何学

キーワード：ツイスター空間 二重被覆写像 双有理変換 有理多様体

1. 研究開始当初の背景

ツイスター空間の代数幾何学的手法による研究は 1980 年代初頭になされた Hitchin の研究に端を発する。そこではケーラー計量を持つコンパクトツイスター空間はよく知られた標準的な対象(3次元複素射影空間及び3次元旗多様体)に限ることが示された。その後、Campana (1991)により Moishezon ツイスター空間の位相構造が非常に限定されたものになることが示され、また 2000 年頃までに、Poon, LeBrun, Kreussler-Kurke, Joyce, 藤木らにより、Moishezon ツイスター空間(つまり射影代数多様体と双有理同値なコンパクトツイスター空間)の具体例が見出された。2005 年頃から 10 年間ほどの間に行われた研究代表者による研究により Moishezon ツイスター空間の新たな具体例が大量に見出され、それらの特徴付けも与えられた。以上一連の研究により、一定の条件付きではあるが、Moishezon ツイスター空間の全体像が見え始めていた。

2. 研究の目的

- ・ Moishezon ツイスター空間の全体像を理解すること。
- ・ 代表的なツイスター空間の間の関係(特に変形同値性)を理解すること。
- ・ Moishezon ツイスター空間と Fano 多様体との関係を理解すること。
- ・ Moishezon ツイスター空間のわかりやすい例の具体的な構成方法を与えること。
- ・ Moishezon ツイスター空間に対応する自己双対計量の微分幾何学的な性質、特に 3 次元 Einstein-Weyl 空間上のモノポール構成、および非コンパクト 4 次元多様体上の標準ケーラー計量との関係を理解すること。

3. 研究の方法

Hitchin による当初の研究以来、コンパクトツイスター空間の代数幾何学的手法による研究には基本系と呼ばれる線形系が重要な役割を果たしてきた。基本系は、反標準直線束の半分(これは任意のツイスター空間上で自然に定義される正則直線束)が定める完備線形系であり、ツイスター空間上の実構造(real structure)により不変である。基本系は、既約で実な元(つまり因子)が非特異であるという顕著な性質を持つ。上記 Poon, LeBrun, Kreussler-Kurke, Joyce, 藤木や筆者による研究により、ツイスター空間の構造はこの非特異因子の構造によってかなり規定されることが明らかになってきた。

基本系が 3 次元以上となるコンパクトツイスター空間は LeBrun (1991)により構成されたツイスター空間に限ることが知られていた。また基本系が 2 次元となる Moishezon ツイスター空間は Campana-Kreussler (1998)により研究されたものになることも知られていた。また Joyce により構成されたトラス作用を持つ自己双対計量に対応するツイスター空間は Moishezon であり、そのほとんどは基本系が 1 次元(つまりペンシル)であることが知られていた。

基本系がペンシルになっているとき、ツイスター空間の構造を理解するためには基本系そのものではなく多重基本系を考察する必要がある。しかし(興味深いことに)多重基本系は多くの例において非特異元をもたず、考えにくいという難点があった。研究代表者による 200 年頃からの研究により、基本系の可約元の既約成分たちを用いて多重基本系の(基本系の元の和では書き表せない)元を与える方法が見出され、多重基本系に付随する有理写像を用いて Moishezon ツイスター空間の構造が調べられた。

本研究においても、基本系の元の構造を利用して多重基本系の構造を調べ、多重基本系に付随する有理写像を用いて Moishezon ツイスター空間の代数幾何学的な構造を研究する。上記のように、Moishezon ツイスター空間は基本系が 2 次元以上のとき構造が理解されているので、問題となるのは基本系が 1 次元以下の場合である。基本系が 1 次元未満(つまりたかだか一つしか元をもたないとき)は、現段階では研究の手段がない。本研究では基本系がペンシルとなっている Moishezon ツイスター空間の全体像とそれらの構造を、多重基本系を用いて考察する。

なお、基本系が 1 次元未満となっている Moishezon ツイスター空間の例は知られていない。

4. 研究成果

主要な結果として次の分類定理を得た。

Moishezon ツイスター空間で基本系がペンシルとなっているものは以下の 2 種類のツイスター空間に分類される：

- (i) LeBrun 型のツイスター空間
- (ii) 二重被覆型のツイスター空間

以下でこれら 2 種類のツイスター空間について詳しく説明する。

LeBrun 型のツイスター空間は、以下のようなミニツイスター空間上の conic 束の構造をもつものである。ここでいうミニツイスター空間は、Joyce 計量にツイスター空間に作用する群 $C^* \times C^*$ の C^* と同型な部分群であって 1 次元の固定点成分をもつものを取り、それによるツイスター空間の商空間として得られるものであり、以前の研究代表者による研究で具体的に構成されたものである。上記の LeBrun によるツイスター空間はその最も単純な例である。またツイスター空間からミニツイスター空間への射影 (conic 束の構造) は、多重基本系により与えられ、基本系を何倍すればよいかは基本系の非特異元の構造から具体的に計算できる。また、ここでいう conic 束は不確定点をもつ (つまり多重基本系が固定点をもつ) この conic 束の discriminant locus はいくつかのミニツイスター直線からなる。

一方、二重被覆型のツイスター空間は次のような構造をもつ。 m を自然数とし、 m 次元射影空間 P^m 内の m 次正規有理曲線 C をとり、線形射影 $P^{m+2} \rightarrow P^m$ によるその逆像を $S(C)$ と書き、 C 上の平面スクロールという。平面スクロールは錐の自然な一般化であり、 $S(C)$ は非常に単純な構造をもった 3 次元有理多様体である。二重被覆型のツイスター空間はある m に対して $S(C)$ の二重被覆で 4 次超曲面による切断を分岐因子としてもつものと双有理同値である。 (m はツイスター空間ごとに異なる値をとる。)そしてツイスター空間から $S(C)$ への (有理的) 二重被覆写像は、多重基本系 (正確には基本系の m 倍) に付随する有理写像である。さらに、分岐因子を切り出す 4 次超曲面の定義式はかなり限定された形のものとなり、その結果として二重被覆型のツイスター空間は 4 種類のものに分類される。

二重被覆型のツイスター空間はもともと Poon と Kreussler-Kurke による 1992 年の論文で初めて見出された。そこではツイスター空間の位相構造はただ一つのものに限定されていたが、上記の主結果ではそのような制約は無く、彼らによるツイスター空間の大幅な一般化とみなすことができる。また、彼らの結果を詳細に検討すると、彼らが研究した二重被覆型のツイスター空間も上記 4 種類に分類されることがわかる。以上のことから、本研究で得られた結果は、Poon と Kreussler-Kurke が位相構造に関する非常に強い制約の下で得た分類結果が、位相構造に関する仮定をはずしても成立することがわかる。

今回得られた結果により、Moishezon ツイスター空間で基本系が 1 次元以上となっているものは、次の 3 種類に分類されることがわかる。

- LeBrun 型
- 二重被覆型
- Campana-Kreussler 型

最後のものは、すでに述べた Campana-Kreussler により研究されたものであり、基本系が 2 次元であるという性質で特徴付けられる。

この分類結果は、予想外にシンプルなものと言える。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Nobuhiro Honda, Bernd Kreussler	4. 巻 95
2. 論文標題 Algebraic dimension of twistor spaces whose fundamental system is a pencil	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Lond. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 989-1010
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/jlms.12043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nobuhiro Honda	4. 巻 285
2. 論文標題 Twistors, Quartics, and del Pezzo Fibrations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1--134
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/memo/1414	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 本多宣博
2. 発表標題 Twistors, quartics, and del-Pezzo fibrations
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 本多宣博
2. 発表標題 Toward classification of Moishezon twistor spaces
3. 学会等名 複素解析幾何セミナー（東大駒場）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 本多 宣博
2. 発表標題 Twistor spaces, Del Pezzo fibrations, and quartic hypersurfaces
3. 学会等名 中央大学 幾何・トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuhiro Honda
2. 発表標題 Twistor spaces, Del Pezzo fibrations, and quartic hypersurfaces
3. 学会等名 Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuhiro Honda
2. 発表標題 Twistors, quartics, and del Pezzo fibrations
3. 学会等名 The 24th Symposium on Complex Geometry (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuhiro Honda
2. 発表標題 Twistors, quartics, and del Pezzo fibrations
3. 学会等名 Workshop on Global Aspects of Projective and Kahler Geometry
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Honda
2. 発表標題 Algebraic Geometry of Twistor Spaces
3. 学会等名 Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>ホームページ http://www.math.titech.ac.jp/~honda/index.html</p>
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

<p>国際研究集会 Trends in Modern Geometry</p>	<p>開催年 2017年～2017年</p>
<p>国際研究集会 Trends in Modern Geometry</p>	<p>開催年 2016年～2016年</p>

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------