

令和 4 年 6 月 3 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2016～2020

課題番号：16H03935

研究課題名（和文）解析的捩率と判別式

研究課題名（英文）Analytic torsion and discriminant

研究代表者

吉川 謙一（Yoshikawa, Ken-Ichi）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20242810

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 7,000,000円

研究成果の概要（和文）：対数的Enriques曲面の解析的捩率不変量を構成し、それがDel Pezzo曲面のKählerモジュライ上のBorcherds積で書ける事を示した。Enriques多様体の解析的捩率不変量を構成し、それがWeil-Petersson計量のポテンシャルになる事を示した。非Borcea-Voisin型Calabi-Yau軌道体のBCOV不変量の計算例を与えた。偶テータ定数の積の2-初等K3曲面のTorelli写像によるの準引き戻しが種数の低い偶テータ定数の積とBorcherds積で書ける事を示した。j-不変量の差をBorcherds Φ -関数の上半平面の直積への引き戻しの積として表す公式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対合付K3曲面と3次元Calabi-Yau多様体に限られていた解析的捩率不変量の構成法をあるクラスの特異Calabi-Yau空間や高次元Enriques多様体に拡張する事で、より広範なクラスの多様体に対して解析的捩率不変量が存在し、モジュライ空間上に興味深い関数が存在する事が示された。これまでIV型領域上の保型形式に限られていた無限積展開を持つ保型形式の理論をIV型領域上の別の直線束の切断に拡張できる可能性が示唆された。

研究成果の概要（英文）：We constructed a holomorphic torsion invariant for log-Enriques surfaces and proved that this invariant is expressed as the Petersson norm of an explicit Borcherds product on the Kaehler moduli space of the corresponding Del Pezzo surface. We constructed a holomorphic torsion invariant for Enriques manifolds of higher dimension and proved that this invariant is a potential function of the Weil-Petersson metric on their moduli space. For some non-Borcea-Voisin Calabi-Yau orbifolds of dimension three, we computed the BCOV invariant. We proved that the quasi-pullback of the product of the even theta constants via the Torelli map for 2-elementary K3 surfaces is given by the product of even theta constants of smaller genus and a Borcherds product. We gave a factorization formula for the difference of j-invariants in terms of the pullback of the Borcherds Φ -function to the product of complex upper half plane.

研究分野：複素幾何学

キーワード：解析的捩率 BCOV不変量 判別式 保型形式 Borcherds積 Calabi-Yau多様体 Enriques多様体 対数的Enriques曲面

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa(以下 BCOV と略す)は古典的ミラー対称性を楕円曲線の数え上げ問題に一般化する予想を 1994 年に提唱した。彼らの予想は以下のように定式化される。3 次元 Calabi-Yau 多様体 X の BCOV 不変量と呼ばれる不変量が X の解析的振率と Bott-Chern 形式および整コホモロジー格子の余体積を用いて定義される。BCOV 不変量は 3 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間上の関数となり、弦理論の B-模型における種数 1-弦振幅関数 F_1 と同一視され、代数的にはモジュライ空間のコンパクト化において判別式軌跡を特徴付ける。より正確には、BCOV 不変量はモジュライ空間上で Hodge 束と反標準束を用いて定まる或る直線束の切断の標準的なノルムと捉える事ができる。ミラー対称性では大複素構造極限(large complex structure limit)と呼ばれる 3 次元 Calabi-Yau 多様体の族 $\pi: X \rightarrow (\Delta^*)^n$ を考え (Δ^* は穴空き円盤で n はファイバーの Hodge 数 $h^{1,2}$)、この族にミラー Calabi-Yau 多様体 Y が対応すると予想されている。大複素構造極限の原点の近傍において Hodge 束と反標準束の自然な自明化が知られており、この自明化により BCOV 不変量を大複素構造極限の近傍で定義された関数と捉えることができる。この様にして、BCOV 不変量から大複素構造極限の底空間 $(\Delta^*)^n$ (穴空き円盤の直積) 上の関数 F^B が定まる。一方で、 Y に対する種数 1-弦振幅関数 F^A が、 Y の複素された Kähler 錐上で種数 0 と種数 1 の曲線の数え上げ不変量を用いた或る無限積として定義される。種数 1 ミラー対称性 (BCOV 予想) は F^A が原点の近傍で収束し、ミラー写像により Y の複素化された Kähler 錐の無限遠点の近傍と大複素構造極限の底空間の原点の近傍を同一視するとき、 F^A と F^B が一致することを主張する。当研究課題が開始された時点では、研究代表者およびその共同研究者による研究によりミラー 5 次超曲面の BCOV 不変量と Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量が決定され、一方 A. Zinger により一般次元の射影空間の Calabi-Yau 超曲面の種数 1 Gromov-Witten 不変量が計算されていた。特に、3 次元 5 次 Calabi-Yau 超曲面とそのミラーとの間で種数 1 ミラー対称性が確かめられていた。また、研究代表者はアーベル的商特異点を持つ 3 次元 Calabi-Yau 軌道体に対して BCOV 不変量を拡張し、Borcea-Voisin 多様体の場合に軌道体としての BCOV 不変量がクレパント解消として得られる 3 次元 Calabi-Yau 多様体の BCOV 不変量に普遍定数を除いて一致することを見出していた。

BCOV 予想とは別に、Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量の因数分解として現れる対合付 K3 曲面の解析的振率不変量が研究代表者と共同研究者によりモジュライ空間上の保型形式を用いて記述されていた。これらの保型形式の中でも Enriques 曲面の判別軌跡を特徴付ける Borchers Φ -関数と呼ばれる 10 次元の保型形式は特に重要であり、Dedekind η -関数と楕円曲線の判別式の等価性を主張する古典的な Jacobi の公式を拡張する形で、Borchers Φ -関数の代数的表示式が研究代表者と共同研究者により知られていた。

2. 研究の目的

(1) Hodge 数レベルのミラー対称性が確立されている (Borcea-Voisin 型以外の) Calabi-Yau 多様体の代表的クラスとしてトーリック多様体の Calabi-Yau 超曲面が挙げられる。トーリック多様体の Calabi-Yau 超曲面に対し、BCOV 不変量を決定する。

(2) Borcea-Voisin 型 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間上で、固定曲線の非零テータ定数全部の積が Borchers 型無限積で書ける事を示す。これにより、BCOV 予想の無限積展開に関する部分を Borcea-Voisin 型 Calabi-Yau 多様体に対して確立し、Gopakumar-Vafa 不変量の明示公式を予想する。さらに、この結果の系として Borchers 積の理論を非標準的保型因子に対して拡張する。

(3) Calabi-Yau 軌道体とそのクレパント解消に対して、両者の BCOV 不変量の比がクレパント解消の位相型のみ依存する定数で与えられる事を示し、Calabi-Yau 軌道体とそのクレパント解消の BCOV 不変量の等価性を全ての Calabi-Yau 軌道体に対して確立する。

(4) 高次元 Calabi-Yau 多様体や Enriques 多様体、それらの対数版や特異版などに対して解析的振率不変量を構成し、それを決定する。

3. 研究の方法

(1) E. Viehweg により偏極 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間が構成されており、モジュライ空間は準射影的代数多様体で、射影代数的なコンパクト化を持つ事が知られている。BCOV 不変量はモジュライ空間上の関数と見なされ、BCOV 予想はモジュライ空間の大複素構造極限点の近傍における関数の等式と理解される。BCOV 不変量の大複素構造極限点の近傍における具体的表示を BCOV 不変量の定義から得ることは不可能なので、BCOV 不変量がモジュライ空間あるいは Hilbert スキームの上で充す微分方程式を決定する事を考え、その方程式を解くことによりモジュライ空間あるいは Hilbert スキーム上の代数関数あるいは代数的な切断のノルムとして BCOV 不変量を理解する事が当初の計画であった。

(2) 対合付 K3 曲面 (2-初等 K3 曲面) に対してその固定点軌跡の Jacobi 多様体を対応させる

Torelli 写像を考えると, Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量は IV 型領域上の Borchers 積と Torelli 写像による偶テータ定数の引き戻しの積として書ける. 一方, Borcea-Voisin 多様体のモジュライ空間の判別軌跡は別の位相型を持つ Borcea-Voisin 多様体のモジュライ空間になっている. BCOV 不変量の自明な零点を除去して判別軌跡に制限することにより, 或る位相型を持つ Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量から別の位相型を持つ Borcea-Voisin 多様体のモジュライ空間上の直線束の切断が得られる. この操作は準制限 (quasi-pullback) と呼ばれる. この様なモジュライ空間の帰納的構造に着目し, モジュライ空間の包含に関する帰納法により BCOV 不変量に対応する切断の関係式を得るために, BCOV 不変量に対応する切断の準制限に関する振る舞いを明らかにする.

(3) BCOV 予想の仮定の下にクレパント解消に関する BCOV 不変量の比較は種数 1 インスタントンの比較に相当し, 両者の一致が期待される. BCOV 不変量が Quillen 計量と L2-計量の比で記述される事から, 課題(3)を両計量のクレパント解消に関する振る舞いを記述する問題と理解できる. L2-計量のクレパント解消による振る舞いは容易に記述できるので, 課題(3)はクレパント解消に関する Quillen 計量の振る舞いを記述する問題に帰着する. そこで, Borcea-Voisin でない Calabi-Yau 軌道体に対して Quillen 計量の振る舞いを調べる.

(4) Ricci 平坦計量を許容する有理曲面のクラスとして対数的 Enriques 曲面があり, BCOV 不変量や解析的振率不変量をこのクラスの曲面に拡張し, Borchers 積との関係を調べる. その後高次元の多様体に対して解析的振率不変量を拡張し, 併せてモジュライ空間上の具体的な関数としての公式を得る.

4. 研究成果

(1), (4) 研究期間中に BCOV 不変量分野において Eriksson-Freixas i Montplet-Mourougane の 3 名による大きな進展があり, 一般次元 Calabi-Yau 多様体に対して BCOV 不変量が定義され, さらに BCOV 不変量の境界挙動が Calabi-Yau 超曲面の判別式を用いて決定された. その結果, 彼らにより Fano 多様体の Calabi-Yau 超曲面の場合には BCOV 不変量に対応する代数的な切断が決定された. また, 一般次元射影空間の Calabi-Yau 超曲面のミラー Calabi-Yau 多様体に対して BCOV 予想が証明された. 他研究グループによるこのような著しい進展が BCOV 不変量に関してあったため, 研究代表者はこの進展を理解することに努め, BCOV 不変量に関する当該課題(1)については大きな進展が得られなかった. その一方で, 研究代表者の過去の解析的振率の退化挙動に関する結果と Eriksson-Freixas i Montplet-Mourougane による Hodge 構造の退化に伴う L2 計量の特異性に関する結果を併せると, 係数束が自明な場合では, 解析的振率の漸近展開に現れる発散の主要項が特異ファイバーに付随する特性類とモノドロミーの固有値で記述される事が判明した. また, 特異ファイバーの特異点が孤立しているという仮定の下で, 係数束が中野半正ベクトル束と相対標準束のテンソル積の場合にも同様の結果が成り立つ事が判明した. 解析的振率の漸近展開に関するこの成果は研究代表者の過去のプレプリント arXiv:1007.2835v1 を改定する形で公表する予定である. Riemann 面の退化族に対して小さい固有値の評価への応用も見込まれ, 本研究課題の後を受けた新規研究課題において研究が継続されている.

(2) Borcea-Voisin 多様体に対して BCOV 不変量が Borchers 積と偶テータ定数の積で書けることから, 其々の準引き戻しを計算することとなる. Borchers 積の準引き戻しは馬昭平氏により計算されている. そこで g 次 Siegel モジュラー形式である偶テータ定数の積の準引き戻しを計算し, それが $g-1$ 次の偶テータ定数の積と Borchers 積とで書ける事を示した. その結果, 偶テータ定数の積の Torelli 写像による引き戻しが Borchers 型無限積で書けるという予想を間接的に支持する結果が得られた. まだ有限個ではあるが, この結果は高次元 Siegel モジュラー形式に Borchers 積が対応する事を示した最初の例ではないかと思われる. この結果を論文にまとめて公表予定である.

(3) 特異点を持つ対合付 $K3$ 曲面と楕円曲線の直積に対して Borcea-Voisin 構成法を適用し 3 次元 Calabi-Yau 軌道体を得る事ができる. この様にして得られる軌道体は Borcea-Voisin 軌道体よりも一般に悪い商特異点を持ち, Borcea-Voisin 軌道体の或る軌跡を潰して得られる空間である. 特異点を持つ $K3$ 曲面が対数的 Enriques 曲面の標準被覆 $K3$ 曲面の場合に, この様にして得られる 3 次元 Calabi-Yau 軌道体の (軌道体の意味での) BCOV 不変量を求めた. その結果, この例の場合に, 軌道体とそのクレパント解消に対して BCOV 不変量が普遍定数を除いて一致する事が確認され, 研究目的(3)で述べた問題がこの例に対して確かめられた. 以上の結果は対数的 Enriques 曲面の解析的振率不変量を研究した論文の一つの節にまとめられており, 論文はプレプリント arXiv:2009.10302v1 として公開されている.

(4) $1/4(1, 1)$ 型の 2 次元商特異点のみを特異点を持つ対数的 Enriques 曲面に対して, 軌道体の意味での解析的振率と Ricci 平坦体積形式から定まる或る Bott-Chern 形式を用いて解析的振率不変量を定義した. また, この様な対数的 Enriques 曲面のモジュライ空間が奇ユニモジュラー格子に付随する直交型モジュラー多様体であり, Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライと同型である事を示した. さらに, 解析的振率不変量が奇ユニモジュラー格子に付随する Borchers 積の Petersson ノルムであり, ノルム (-1) ベクトルが定める Heegner 因子を特徴付ける事を示し

た. 本研究とは独立に, 本課題研究期間中にFu-ZhangによりKLT特異点(川又対数端末特異点)を許容するCalabi-Yau多様体のBCOV不変量が導入され, さらにBCOV不変量の双有理不変性が示されている. 本研究課題(4)で扱った対数的Enriques曲面は有理曲面であるため双有理的にはただ一つのクラスから成る. 一方でそのBCOV不変量は上に書いた解析的振率不変量と等価なので, それがモジュライ空間上の非自明な保型形式のPetersonノルムであることから, 特に双有理的であっても同一の値とはならない. 以上のことから,BCOV不変量の双有理不変性という性質は, KLT特異点を持つCalabi-Yau多様体というクラスを外れると成り立たない事が判明した. この定理は本研究の予想外の副産物である. 以上の結果は(3)の結果と併せてプレプリントarXiv:2009.10302v1として公開されている.

対数的Enriques曲面の研究とは独立に高次元Enriques多様体の解析的振率不変量を導入し, その不変量がモジュライ空間上でみたす微分方程式を求めた. ただし, 判別軌跡に対応して現れるDiracデルタカレントの係数は特別な場合のみが求まっており, 一般の場合はまだ決定されていない. この研究の結果, BCOV不変量と異なる可能性のある解析的振率不変量が或るクラスの高次元多様体に対して存在している事が明らかになった. 本研究課題の後を受けた新規研究課題においてこの新しい解析的振率不変量の研究が継続されている.

(5) 当初の研究計画には書かれていないが, Enriques曲面の判別軌跡を特徴付けるBorchers Φ -関数と楕円曲線の同型類を与える j -不変量についても研究を行なった. j -不変量の差として与えられる上半平面の直積 $H \times H$ 上の関数は数論的な興味から多くの研究がなされてきた保型関数である. 本研究では, この関数のBorchers Φ -関数による因数分解を直積型Kummer曲面のEnriques構造を考えることにより与えた. より詳しく述べると, 一般の直積型Kummer曲面上には自己同型による共役を除いて15個の異なるEnriques構造が入る事が向井茂氏と大橋久範氏により知られていた. この15種類のEnriques構造に対応して, 15個の異なる $H \times H$ の10次元IV型領域へのモジュラー埋め込みが存在する. この15個の埋め込みは9個の偶埋め込みと6個の奇埋め込みに分類する事ができ, それら偶奇の全ての比を考えてその積を取ることで j -不変量の差が得られる. この結果はプレプリントarXiv:2103.02540v2として公開されている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shouhei Ma, Ken-Ichi Yoshikawa	4. 巻 156
2. 論文標題 K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space IV: The structure of the invariant	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 1965-2019
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X2000737X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ken-Ichi Yoshikawa	4. 巻 33
2. 論文標題 K3 surfaces with involution and analytic torsion	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Sugaku Exposition	6. 最初と最後の頁 85-109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/suga/449	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shu Kawaguchi, Shigeru Mukai, Ken-Ichi Yoshikawa	4. 巻 140
2. 論文標題 Resultants and the Borchers η -Function	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1471-1519
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2018.0045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshikawa Ken-Ichi	4. 巻 310
2. 論文標題 Analytic Torsion for Borcea-Voisin Threefolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Progress in Mathematics	6. 最初と最後の頁 279 ~ 361
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-49638-2_13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 吉川 謙一	4. 巻 68
2. 論文標題 対合付きK3曲面と解析的撥率	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 225, 245
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11429/sugaku.0683225	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 51
2. 論文標題 Quasi-pullback of Borcherds products	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1061-1078
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12287	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件(うち招待講演 9件/うち国際学会 9件)

1. 発表者名 吉川 謙一
2. 発表標題 Quasi-pullback of certain Siegel modular forms and Borcherds products
3. 学会等名 「保型形式, 保型表現, ガロア表現とその周辺」RIMS共同研究(公開型)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉川 謙一
2. 発表標題 Degeneration of Riemann surfaces and small eigenvalues of Laplacian
3. 学会等名 Grauert theory and recent complex geometry (Grauert理論と最近の複素幾何)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉川謙一
2. 発表標題 Degeneration of Riemann surfaces and small eigenvalues of Laplacian
3. 学会等名 India-Japan Web-Workshop on Vector Bundles and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken-Ichi Yoshikawa
2. 発表標題 Enriques 2n-folds and analytic torsion
3. 学会等名 Intercity Seminar in Arakelov Geometry 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ken-Ichi Yoshikawa
2. 発表標題 Enriques 2n-folds and analytic torsion
3. 学会等名 Discussion Meeting on Bundle 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ken-Ichi Yoshikawa
2. 発表標題 Enriques manifolds and analytic torsion
3. 学会等名 第23回複素幾何シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ken-Ichi Yoshikawa
2. 発表標題 Enriques manifolds and analytic torsion
3. 学会等名 K3 Surfaces and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ken-Ichi Yoshikawa
2. 発表標題 Enriques manifolds and analytic torsion
3. 学会等名 第13回代数・解析・幾何学セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ken-Ichi Yoshikawa
2. 発表標題 Holomorphic torsion invariants for K3 surfaces with involution and Borchers products
3. 学会等名 Moduli spaces and modular forms (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	並河 良典 (Namikawa Yoshinori) (80228080)	京都大学・数理解析研究所・教授 (14301)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	小西 由紀子 (Konishi Yukiko) (30505649)	津田塾大学・学芸学部数学科・教授 (32642)	
連携研究者	入谷 寛 (Iritani Hiroshi) (20448400)	京都大学・理学研究科・教授 (14301)	
連携研究者	馬 昭平 (Ma Shouhei) (80633255)	東京工業大学・理工学研究科・准教授 (12608)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
	アメリカ	カリフォルニア大学	サンタバーバラ校