様　式　C−19、F−19−1、Z−19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：若手研究(A)
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｈ０５９９３

研究課題名（和文）数論的D加群とその応用

研究課題名（英文）Arithmetic D-modules and its applications

研究代表者
阿部　知行（Tomoyuki, Abe）

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・准教授

研究者番号：７０６０９２８９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　8,210,000円

研究成果の概要（和文）：研究成果は大きく分けて二つである．まず，Deligneが予想した有限体上の多様体上のp進係数理論とl進係数理論の同等性の問題に対して，一つの方向，つまりp進係数からl進係数を作り出す方向，をベルリンのEsnault氏ととの共同で示した．
もう一つはp進コホモロジー論の基本定理ともいえる準安定還元定理の手法を用いて，特性サイクルの理論への応用するための基礎的な結果を示した．この基礎的結果は二つに分かれ，まず特性サイクルを定義するうえで必要な関数列の収束性を示し，今後必要になってくるであろうモチビックコホモロジー論の無限圏強化を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
数論的D加群などのp進コホモロジーはこれまで基礎論が中心で，実際に数論幾何学の問題に応用された例は数少ない．今回の研究で数論幾何学の一つの中心問題であるDeligneの予想（の一部）へ応用ができ，さらにl進コホモロジー論の特性サイクルの理論への広い意味での応用の道が開けた．結果の重要性はもとより，これにより今までp進コホモロジー論でしか顧みられてこなかった数々の知見を応用ができたことは大きな成果に値するものと思う．

研究成果の概要（英文）：There are two main results of the research project. First of all, Deligne conjectured that the p-adic coefficients theory and l-adic coefficients theory for varieties over finite field should be "equivalent" in some sense. I proved one direction of this conjecture, namely the direction to construct l-adic coefficients out of p-adic coefficients, together with Prof. Esnault.
The other result is to show some fundamental results to apply the method of semistable reduction theorem for isocrystals, which could be regarded as a fundamental theorem for p-adic cohomology theory, to the theory of characteristic cycles for l-adic coefficients. The results consist of two parts. One is to show a certain convergence of a sequence needed to define characteristic cycles, and the other is to construct an infinity enhancement of motivic cohomology theory which is expected to be used in the future project.

研究分野：数論幾何学

キーワード：過収束アイソクリスタル　分岐理論　無限圏

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

数論幾何学は関数体の Weil 予想に触発されて大きな発展を遂げた歴史がある．Grothendieck は Weil 予想を解決するためにエタールコホモロジーの理論を構築したことはよく知られている．底になる体を一つ固定したとき，エタールコホモロジーは底の標数とは異なる素数を一つ固定したときに定義されるコホモロジー理論であり，l 進コホモロジーと呼ばれている．この方法だと，底の標数と一致している素数だけが除外されており，「その部分の情報」を取り出すようなコホモロジー論の存在が期待される．これが p 進コホモロジー論であり，これも Grothendieck によって定義された．l 進コホモロジーは特異コホモロジーの正標数類似とみなされるので，位相的なコホモロジー論であるといえる一方で，p 進コホモロジーは de Rham コホモロジーの類似であり，より解析的なコホモロジー論であるといえる．

Grothendieck の定義した p 進コホモロジー論は固有かつ滑らかな多様体のみで好ましいふるまいをすることが知られているが，Berthelot は（Monsky-Washnitzer のアイディアを用いることで）一般の多様体に対してもよいふるまいをするコホモロジー論を定義し，リジッドコホモロジーと名付けた．p 進コホモロジーを用いることで Weil 予想を解決することが理論の完成に一つの目安とされていたが，様々な困難を多くの人が乗り越え，Deligne の Weil 予想の証明をまねすることで，Kedlaya が 2000 年代の初頭に達成した．

さて，これにより，l 進コホモロジーと p 進コホモロジーを用いた Weil 予想の証明があるわけだが，実際には l 進コホモロジーは標数と異なる素数を固定するごとに別のものが現れるので，素数の分だけ Weil 予想という一つの問題に対する「別の」証明があることになる．Deligne は Weil 予想を解決した論文の中で，実際は l 進コホモロジーも p 進コホモロジーもある意味で同じだけの情報を持っていると予想した.l 進コホモロジーに対するこの Deligne 予想は Lafforgue による関数体の Langlands 対応の構築で大きな進展を遂げ，曲線の場合には Lafforgue が，十分一般な場合も Drinfeld が解決している．残るは p 進コホモロジーの場合であったが，本研究計画が始まる前に曲線の場合を私が解決した状態であった. これにより p 進コホモロジーも l 進コホモロジーと同水準で基礎理論が構築された状態であったといえる．

一方で，Deligne は高次元の場合に対しても同じような対応を予想しており，それに関しては手つかずの状態であった. この Deligne の予想を一般的に解決することは難しいと思われるが，本研究計画ではその一部を解決するのが一つの目標であった．

２．研究の目的

本研究課題の目的は広義の意味で p 進コホモロジー論, 特に数論的 D 加群の理論の応用である．p 進コホモロジー論は l 進コホモロジーと同じような基礎付けができているが，一方で基礎づけは l 進コホモロジーに比べて極めて難しい．例えば，p 進コホモロジーの一種である数論的 D 加群の有限性の性質を示すためには Kedlaya によって証明された準安定還元定理と呼ばれる，一種の特異点の解消型の定理を用いなくてはならない．そのため p 進コホモロジーで用いられた手法を他の理論に応用することも一つの目的とする．それを念頭に置き次の二つを目的とした．

(1) 一つ目として，私が証明した曲線の時に Deligne の予想の高次元化である．Deligne の予想は l 進係数理論（ガロワ表現とよばれる）と p 進係数理論（過収束 F アイソクリスタルと呼ばれる）がある意味で一対一対応するという予想である．曲線の場合は Langlands 対応を介して対応が構成されるので，関手的ですらあらず，きわめて抽象的な対応であることがわかる．

(2) 二つ目の目的として，上記の Kedlaya による準安定還元定理の手法を l 進の分岐理論に用いることである. Kedlaya の準安定還元定理の証明の核となっている部分は以下のとおりである：ブローアップをして「ある種の性質」を改善する問題を考える．その時ブローアップが有限回で止まることが核心だが，準安定還元定理では Zariski-Riemann 空間のコンパクト性を用いることでブローアップの有限性を示すのである．このような状況は l 進コホモロジーの分岐理論でも見られる．この手法を用いることで l 進層の特性サイクルの押し出し公式予想に新しい知見をもたらすことを目的とする．

３．研究の方法

研究の方法に関しては次の研究成果に含めながら記述したので，そちらを参照.

４．研究成果

(1) 問題には二つの方向がある．一つは p 進係数，つまり過収束 F アイソクリスタルを一つ固定したときに l 進層を構成する方向性とその反対の方向性である．この p 進係数から l 進層を構成する方向は反対に比べると道筋が見えやすい．実際 Drinfeld の結果を用いると l 進層を構成するためには多様体上のすべての曲線に対して対応するはずの l 進層を構成してある種の性質を示せば十分である．すでに曲線の場合の Deligne の予想は解決されていることを考えると，残る問題はこの「ある種の性質」を示すことである．ある種の性質はいわゆる Lefschetz の問題

と呼ばれているもので，既約な過収束 F アイソクリスタルが多様体上にあったとき十分に一般的な曲線に制限してやれば既約性が保たれるという性質である．今回の研究で底が有限体の場合にこの Lefschetz の性質を過収束 F アイソクリスタルで示すことに成功し，その結果として Deligne の予想の片方である，過収束 F アイソクリスタルから l 進層を構成するのに成功した．なお，Lefschetz の性質は底の体によらず一般的に成立するものと期待されるが，今回の研究ではそこまでは示すことができなかった．今後の課題となる．
証明のあらすじは以下のとおりである．Lefschetz の性質を自体を証明するのは簡単ではないが，Lefschetz の性質のコホモロジー類似があり，こちらはコホモロジー論を用いることができる．一般的に Lefshcetz の性質はそのコホモロジー類似から示すことはできないが，底が有限体である場合は，幸運なことに，コホモロジー類似から従うことを示すことができる．これは有限体上の多様体の 1 階の過収束アイソクリスタルは有限エタール被覆を取ることで自明化することができるという，Katz-Lang の定理の帰結である．これにより Lefschetz の問題がそのコホモロジー類似を証明することに帰着される．このコホモロジー類似は過収束アイソクリスタルが馴（tame）なときは数論的 D 加群を用いたコホモロジー論の基本性質から簡単に導かれる．一般の時はより難しいが，曲線の場合の Langlands 対応を用いることで l 進層の問題と関連付け，l 進層の Lefschetz の問題を用いることで証明される．Lefschetz の問題が解決されれば Deligne の予想の片方を証明するのは容易である．

(2) l 進層が与えられたとき特性サイクルが斎藤により定義された．とても簡単に説明すると l 進層を固定したとき様々な関数を取ってくる．関数を取ったとき「消滅隣体の総次元」を考えることができる．関数が十分に良いときはこの構成により 0 サイクルが現れることがわかる．この 0 サイクルが，少なくとも超局所的には，関数の取り方によらないというのが斎藤の基本定理であり，そのサイクルが特性サイクル（のようなもの）である．ここで，良い関数が十分に存在することは Beilinson の特性多様体の存在定理から従っており，深い部分である．
齋藤はこの特性サイクルが押し出しに関して関手的にふるまうことを予想し，ある種の場合で証明したが，一般的な設定では手掛かりが得られていない状況である．例えば X から Y への固有射 f と X 上の l 進層 F をとる．押し出し f_*F の特性サイクルを計算したいとすると，Y の関数の f でのひき戻しと F の消滅隣体の総次元の計算が必要となってくる．しかし，どのような関数を取っても引き戻しが良い関数とならない例が正標数体上ではいくらでも存在しており，そのような場合はこの安直な方法では計算ができない．
本研究では関数を一つとするのではなく，関数の列を考え，それに付随して「反復消滅隣体」を考えることで「良い関数」は存在しなくても「良い関数列」を考えることで代用することが基本的な戦略である．この手法に関して本研究では二つの基本的な結果を示した．

(2)-(a) この方法を用いようとしたとき，「良い関数列」の概念を定義するのは容易だが，良い関数列によらず同じ 0 サイクルが現れることを証明するのに困難が現れる．それをするためには良い関数列の空間を考えその空間が何かしらの意味で可縮であることを示すのが常套手段である．そのためには一つの関数列の族を考え，それに関数を追加することで「良い関数列」にできることを示す必要がある．この関数を選択する過程は極めて困難であるが，今回は Kedlaya の準安定還元定理の手法を用いることで解決することができた．証明の概要は以下のとおりである．
関数列を選択しなくてはならないが，そのためには帰納法で少しずつ良い関数に近づける手法を考える．その時ほとんどの関数が欲しいふるまいを示すことを証明するために消滅隣体を（generic に）計算する必要が出てくる．消滅隣体の計算は一般的には極めて困難であるが，今回の場合は（一般的な）関数に付随する Artin-Schreier 層の消滅隣体の計算に帰着できる．Artin-Schreier 層とは言っても一般的な関数の場合は困難である．そこで関数が Artin-Schreier 層の消滅隣体の計算に適した形に書き換えることを考える．Kedlaya の手法を応用することで，一般の関数が，多様体の改変の下で，計算できることが証明できた．この結果は論文としてまとめたものの，まだ発表しておらず，本研究計画がさらに進んだ時点で公表することを予定している．

(2)-(b) (2)-(a)を用いることにより関数列に対して 0 サイクルが定義される．次に必要になるのはこの 0 サイクルが関数列の選択によらないことを示すことである．哲学的には(2)-(a)によりこれらの 0 サイクルの「ホモトピー」の情報が含まれているわけだが，このデータはあまりにも最終的に必要な形からかけ離れている．これは一般化された底での消滅隣体の理論は底多様体の改変をしないとよい挙動を示さないことに起因しており，アファイン空間でパラメータ付けされた関数列を持ってきても，出てくるホモトピーはあくまでもそのアファイン空間を改変したものの上でしか定義されていないということに原因がある．この改変された多様体上の 0 サイクルの族から本当に欲しい元のアファイン空間上の 0 サイクルの族を定義することが必要となってくる．さらにこれらのデータはあくまでも局所的にしか得られないので，0 サイクルを帯域化するために降下をする必要がある．
これらの技術的な困難を乗り越えるためには無限圏を導入するのが最も適切と考えられる．つまり，すべてのデータを無限圏の中で扱うことで降下をするのである．しかしこれらの降下に必

要な無限圏の基礎理論は整備されておらず，これの基礎付けを行ったというのが本研究のもう一つの結果である．もう少し具体的にはモチビックコホモロジーの bivariant ホモロジー理論の無限強化を行った．特性サイクルは最終的にはモチビックコホモロジーの元として定義され，それに対して様々なコホモロジー操作が必要となってくる．モチビックコホモロジー論に関しては Voevodsky の研究に端を発し，6 つの関手の枠組みがすでに出来上がっており，Gaitsgory-Rozenblyum らの基本結果を用いることで，そこまで難しくなくこの 6 つの関手の枠組みの無限強化はできる．従来の参画圏に対しては 6 つの関手の枠組みがあればそこから bivariant ホモロジー論を導出するのは難しい作業ではない．しかし今回は降下をするために無限強化が必要となってくる．これは極めて困難である．一つの困難は Gaitsgory-Rozenblyum の定式化では(無限,2)圏というあまり基礎づけがされていない言葉で書かれていることにあり，今回必要な bivariant 理論では 1 射と 2 射を「統合」して bivariant ホモロジー関手（これは（無限,1）圏の間の関手となる)を構成する必要がある．これには無限圏の細やかな扱いが必要となってくる．結果は既にプレプリントとしてまとめ投稿中である．

残念ながらかなりの基礎付けはできたが，当初の目標には研究期間では達することができなかった．今後も本計画は引き継がれることとなる．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Abe Tomoyuki、Caro Daniel	４．巻 140
２．論文標題 Theory of weights in p-adic cohomology	５．発行年 2018年
３．雑誌名 American Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 879～975
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1353/ajm.2018.0021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Abe Tomoyuki	４．巻 2017
２．論文標題 Langlands program for p-adic coefficients and the petits camarades conjecture	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	６．最初と最後の頁 59～69
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/crelle-2015-0045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Abe Tomoyuki、Caro Daniel	４．巻 24
２．論文標題 On Beilinson’s equivalence for p-adic cohomology	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Selecta Mathematica	６．最初と最後の頁 591～608
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-017-0370-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Abe Tomoyuki、Patel Deepam	４．巻 3
２．論文標題 On a localization formula of epsilon factors via microlocal geometry	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Annals of K-Theory	６．最初と最後の頁 461～490
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/akt.2018.3.461	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Abe Tomoyuki	4．巻 31
2．論文標題 Langlands correspondence for isocrystals and the existence of crystalline companions for curves	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Journal of the American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 921～1057
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/jams/898	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Tomoyuki Abe, Deepam Patel	4．巻 印刷中
2．論文標題 On a localization formula of epsilon factors via microlocal geometry	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Annales of K-theory	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　9件／うち国際学会　8件）

1．発表者名 Tomoyuki Abe
2．発表標題 Nearby cycles for arithmetic D-modules
3．学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2018（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Tomoyuki Abe
2．発表標題 Nearby cycles for p-adic cohomology
3．学会等名 Arithmetic Geometry and de Rham Theory（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

１．発表者名
Tomoyuki Abe

２．発表標題
Existence of crystalline companion and l-adic companion

３．学会等名
Fukuoka international conference on arithmetic geometry 2017（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2017年

１．発表者名
Tomoyuki Abe

２．発表標題
Arithmetic D-modules and its applications

３．学会等名
D-modules, Geometric Representation Theory, and Arithmetic Applications（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2017年

１．発表者名
Tomoyuki Abe

２．発表標題
The theory of arithmetic D-modules and its application to arithmetic

３．学会等名
Taiwan Mathematical Society Annual Meeting（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2017年

１．発表者名
Tomoyuki Abe

２．発表標題
Trace formalism and l-p independence in arithmetic D-modules

３．学会等名
Riemann-Hilbert correspondences（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

1．発表者名 Tomoyuki Abe
2．発表標題 Ramification theory and homotopies
3．学会等名 Motives in Tokyo on the occasion of Shuji Saito's 60th Birthday（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 阿部知行
2．発表標題 p進コホモロジーとラングランズ対応
3．学会等名 日本数学会（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Tomoyuki Abe
2．発表標題 Arithmetic D-modules and existence of crystalline companion
3．学会等名 Geometrie analytique et equations differentielles p-adiques（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計2件

国際研究集会	開催年
p-adic cohomology and arithmetic geometry 2018	2018年～2018年
p-adic cohomology and arithmetic geometry 2019	2019年～2019年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Freie Universitat Berlin			